Rešenja

1990. jun

1. (1) Neka je najpe $x \geq -2$. Tada jednačina postaje $x+2+1 = x+3$ identitet $0 = 0$. Neka je $-3 \leq x \leq -2$, tada jednačina glasi $-x-2+1 = x+3$, $x = -4$, što je vrednost van posmatranog intervala. Ako je $x \leq -3$, tada je $-x-2+1 = -x-3$, $-1 = -3$ jednačina kontradikcija. Dakle, rešenja su $x \in [-2, +\infty)$.
2. (2) a) Zamena daje $(a+3)^2 + m(a+3) + (a+3)(a+2) = 0$. Ako je $a = -3$, parametar m može imati bilo koju vrednost. Ako je $a \neq -3$, dobija se $a+3+m+a+2 = 0$, $m = -2a-5$.
b) Dati uslov ćemo ekvivalentno transformisati

$$x_1 - x_2 = x_1x_2, \quad x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2x_2^2, \quad (x_1+x_2)^2 = x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Korišćenjem Vijetovih formula se dobija

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + 4\frac{a-1}{2},$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 - 2a + 1 + 8a - 8, \quad a = 2.$$

3. (3) a) $\log_b a + \log_b a - 2\log_b a = 0$.
b) Najpre je

$$\log_x a = \frac{1}{p}, \quad \log_x b = \frac{1}{q}, \quad \log_x abc = \frac{1}{r},$$

tako da je

$$\log_x a + \log_x b + \log_x c = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \log_x c = \frac{1}{r}.$$

Time je

$$\log_c x = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} = \frac{pqr}{pq - rp - rq}.$$

II način. Najpre je

$$\frac{\log_c x}{\log_c a} = p, \quad \frac{\log_c x}{\log_c b} = q, \quad \frac{\log_c x}{\log_c abc} = r,$$

tako da je

$$\begin{aligned} \log_c x &= r(\log_c a + \log_c b + \log_c c) \\ &= r\left(\frac{\log_c x}{p} + \frac{\log_c x}{q} + 1\right), \end{aligned}$$

$$pq\log_c x - qr\log_c x - rp\log_c x = pqr.$$

4. (4) a) Množenjem sa $\sin^2\alpha$ dobija se

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = \cos^4\alpha, \quad 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

b) Ako je $L = (\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$, tada

$$\begin{aligned} L &= \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \\ &= 2 + 2\sin\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = 2(1 + \cos(\alpha-\beta)) \\ &= 2\cdot 2\frac{1+\cos(\alpha-\beta)}{2} = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}. \end{aligned}$$

II način.

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

5. (5) Jednačina $\tan x(1 + 2\sin x) = 0$ je ekvivalentna disjunkciji $\tan x = 0$ ili $\sin x = -\frac{1}{2}$. Rešenja su

$$x = k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi, \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \quad k, l, m \in \mathbf{Z}.$$

6. (6) v. sliku

Ako je x dužina ivice roglja koja polazi iz njegovog vrha, tada su strane dobijenog osmougla jednake $\sqrt{2}x$. Iz jednakosti $x + \sqrt{2}x + x = a$ sledi $x = a/(2+\sqrt{2}) = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2})$. Zapremina dobijenog poliedra je

$$\begin{aligned} V &= a^3 - 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2x = a^3 - \frac{8}{6}\cdot\frac{a^3}{8}(2-\sqrt{2})^3 \\ &= a^3 - \frac{a^3}{6}(2-\sqrt{2})(4-4\sqrt{2}+2) = a^3 - \frac{a^3}{3}(2-\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) \\ &= a^3 - \frac{a^3}{3}(10-7\sqrt{2}) = \frac{a^3}{3}(7\sqrt{2}-7) = \frac{7a^3}{3}(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Za konkretnu vrednost se dobija približno $208,76cm^3$.

1990. jun, II grupa

7. (1) Ako je $x \geq 2$ jednačina glasi $x + x - 1 + x - 2 = 3$, $x = 2$, što je prvo rešenje. Ako je $1 \leq x \leq 2$, jednačina postaje $x + x - 1 - x + 2 = 3$, $x = 2$. Ako je $0 \leq x \leq 1$, onda $x - x + 1 - x + 2 = 3$, $x = 0$, što je drugo rešenje. Najzad za $x \leq 0$ dobija se $-x - x + 1 - x + 2 = 3$, $x = 0$. Rešenja jednačine su $x \in \{0, 2\}$.

8. (2) a) Zamena vrednosti daje $(a-b)^2 - 2a(a-b) + m = 0$,

$$a^2 - 2ab + b^2 - 2a^2 + 2ab + m = 0, \quad m = a^2 - b^2.$$

II način. Vijetove formule glase: $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1x_2 = m$. Iz prve formule sledi $a - b + x_2 = 2a$, tj. $x_2 = a + b$. Zamena u drugu daje traženu vrednost $(a-b)(a+b) = m$.

9. (3) a) $3\log_b a - 2\log_b a = \log_b a$.

b) Data formula se ekvivalentnim transformacijama svodi na Pitagorinu teoremu

$$\begin{aligned}\frac{\log a}{\log(b+c)}+\frac{\log a}{\log(c-b)} &= 2\frac{\log a\cdot\log a}{\log(b+c)\log(c-b)},\\ \log(c-b)+\log(c+b) &= 2\log a\\ c^2-b^2 &= a^2.\end{aligned}$$

10. (4) a) Oslobađanje od razlomaka daje

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha &= 2+2\cos\alpha,\\ 2+2\cos\alpha &= 2+2\cos\alpha.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 &= 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\ &= 2-2\cos(\alpha-\beta)\\ &= 2\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}\cdot 2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}$$

11. (5) Jednačina $\tan x(2\cos x+1)=0$ je ekvivalentna disjunkciji jednačina $\tan x=0$, $\cos x=-1/2$. Rešenja su $x=k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2l\pi$, $k,l\in\mathbf{Z}$.
12. (6) Isti zadatak kao za I grupu.

1990. septembar

13. (1) Zamena vrednosti u jednačini daje

$$a^2-2ab+b^2-2a^2+2ab+m=0,$$

tako da se dobija $m=a^2-b^2$.
14. (2) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned}I &= \sqrt{I^2}=2(6+\sqrt{35})(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2\\ &= 2(\sqrt{6}+\sqrt{35})(7-2\sqrt{35}+5)=2(6+\sqrt{35})(6-\sqrt{35})\cdot 2\\ &= 4(6^2-35)=4,\end{aligned}$$

pa je $I=2$.

15. (3)

$$\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}+2\tan\frac{\alpha}{2}}{2+2\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+1}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}\tan\frac{\alpha}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}.$$

II način.

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha} &= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\ 1-\cos^2\alpha+\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha &= \sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

16. (4) Jednačina $\sin x(\sin x-1)=0$ je ekvivalentna disjunkciji $\sin x=0$ ili $\sin x=1$; tako da su njena rešenja $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+2l\pi$, $k,l\in\mathbf{Z}$.

17. (5) Neka je

$$\begin{aligned}\log_a b=x &\quad\Leftrightarrow\quad a^x=b;\\ \log_c b=y &\quad\Leftrightarrow\quad c^y=b;\\ \log_c a=z &\quad\Leftrightarrow\quad c^z=a.\end{aligned}$$

Tada je

$$b=a^x=(c^z)^x=c^{zx},$$

a kao je $b=c^y$, to je $c^y=c^{zx}$. Stepeni jednakih osnova su jednaki jedino ako su im jednaki eksponenti, tako da je $y=zx$, što je trebalo dokazati.

II način. Ako je $\log_a b=x$, tj. $b=a^x$, tada je $\log_c b=\log_c a^x=x\log_c a$. Dakle, $x=\log_c b/\log_c a$.

18. (6) v. sliku

Pođimo od suprotne pretpostavke da se 400 tačaka može smestiti u dati krug k tako da su rastojanja između svake dve vaća od $1cm$. Posmatrajmo krugove sa centrima u tim tačkama i poluprečnicima $\frac{1}{2}cm$. Ti krugovi čine familiju disjunktnih skupova (tj. ni koja dva od njih se ne seku niti dodiruju), tako da je njihova ukupna površina jednaka

$$400 \cdot \left(\frac{1}{2}cm\right)^2 \pi = 10^2 \pi cm^2.$$

S druge strane, svi ovi mali krugovi — okoline tačaka — su smešteni u krug k_1, koncentričan datom krugu k, poluprečnika $(9 + \frac{1}{2})cm$. Površina kruga k_1 je $9,5^2 \pi cm^2$, što je manje od $10^2 \pi cm^2$ — površine svih krugova opisanih oko tačaka koji se nalaze u krugu k_1. To je kontradikcija koja obara polaznu pretpostavku i dokazuje tvrđenje.

1990. septembar, II grupa

19. (1) Ako su x_1 i x_2 dati brojevi, tada

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{1-5}{9-5} = \frac{-4}{4} = -1, \\ x_1 + x_2 &= \frac{3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5+3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{9-4} = \frac{-4}{4} = -1. \end{aligned}$$

Na osnovu Vijetovih formula sledi da su x_1 i x_2 rešenja date jednačine. Zadatak se rešava i direktnim metodama.

20. (2) Koreni kvadratne jednačine su jednaki ako je diskriminanta jednaka nuli

$$D = 4(m-3)^2 - 4(11-5m) = m^2 - m - 2 = 0.$$

Vrednosti su $m_1 = -1$ i $m_2 = 2$.

II način. Iz uslova $x_1 = x_2$, $x_1 - x_2 = 0$ kvadriranjem sledi

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1^2 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 0.$$

Prema Vijetovim formulama je

$$x_1 + x_2 = 2(m-3), \quad x_1x_2 = 11 - 5m,$$

tako da se dobija jednačina po nepoznatom parametru

$$4(m-3)^2 - 4(11-5m) = 0$$

kao u prvom rešenju.
21. (3) Jednačina ima smisla za $x > 0$. Kako je $\log_3(3/x) = 1 - \log_3 x$, to uvođenje smene $y = \log_3 x$ daje

$$y^2 + 2y(1-y) = 1, \quad y^2 - 2y + 1 = 0, \quad (y-1)^2 = 0,$$

tako da je $y = 1$. Rešenje je $x = 3$.
22. (4) Ako je $L = \cos^2(\alpha - \beta) - \sin^2(\alpha + \beta)$, tada

$$\begin{aligned} L &= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2 - (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 \\ &= \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta \\ &= \cos^2\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \sin^2\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cos 2\beta. \end{aligned}$$

23. (5) Jednačina je ekvivalentna sa $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, tako da su rešenja $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
24. (6) Ako je B površina baze i H visina piramide, tada je njena zapremina $V = \frac{1}{3}BH$. Neka je H_1 visina manje piramide dobijene presekom i B_1 površina njene baze. Tada je $H_1 = kH$, gde je k neki broj iz intervala $(0,1)$. Dalje je $B_1 = k^2B$, tako daje

$$V_1 = \frac{1}{3}B_1H_1 = \frac{1}{3}k^2BkH = k^3V.$$

Zapremina dobijene zarubljene piramide je $V_2 = V - V_1 = (1-k^3)V$. Iz zahteva

$$V_1 \ : \ V_2 = k^3V \ : \ (1-k^3)V = m \ : \ n$$

se dobija $k^3 : (1-k^3) = m : n$. Dodavanjem brojilaca proporcije imeniocima dobija se

$$k^3 \ : 1 = m \ : \ (m+n), \quad k = \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}},$$

tako da je $H_1 = \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}H$.

1991. jun

25. (1) Jednačina ima smisla ako je $x > 1$. Za te vrednosti je $\log_2 x(x-1) = 1$, $x^2 - x = 2$. Dobijena kvadratna jednačina ima rešenja $x_1 = -1$, što se nalazi van domena definisanosti polazne jednačine, i $x_2 = 2$. Rešenje je $x = 2$.

26. (2) Koristeći trigonometrijske formule dobija se

$$\frac{2\sin 2\alpha \cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = 2\sin\alpha,$$

$$\frac{4\sin\alpha\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = 2\sin\alpha, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

27. (3) Jednačina $\cos x(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$ je ekvivalenta disjunkciji jednačina: $\cos x = 0$ ili $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Rešenja su $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi$, $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

28. (4) Uvođenjem smena $u = \frac{1}{2x-y}$ i $v = \frac{1}{x-2y}$, sistem postaje

$$\begin{aligned} 2u + 3v &= \frac{1}{2} \\ 2u - v &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

Množenjem druge jednačine sa 3 i sabiranjem sa prvom dobija se $u = 1/12$, a potom i $v = 1/9$. Sada je $2x - y = 12$ i $x - 2y = 9$ novi sistem čije je rešenje $x = 5$, $y = -2$.

II način. Oslobađanje od razlomaka daje sistem

$$\begin{aligned} 4x - 8y + 12x - 6y &= (2x-y)(x-2y) \\ 36x - 72y - 36x + 18y &= (2x-y)(x-2y), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 16x - 14y &= (2x-y)(x-2y) \\ -54y &= (2x-y)(x-2y). \end{aligned}$$

Oduzimanjem levih i desnih strana ovih jednačina se dobija

$$16x + 40y = 0, \quad 2x + 5y = 0, \quad x = -\frac{5}{2}y.$$

Smena, npr., u prvu jednačinu daje

$$\frac{2}{-5y - y} + \frac{3}{-\frac{5}{2}y - 2y} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3y} - \frac{2}{3y} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \quad y = -2, \quad x = 5.$$

29. (5) v. sliku

Neka je V vrh kupe, O centar baze, VA i VB izvodnice i S središte tetive AB baze kupe. Ravan određena tačkama VOC je ortogonalna na bazu kupe i time je $\angle VSO = \beta$ nagibni ugao ravni π prema osnovi. Iz trougla ΔVSO sledi da je $VS = H/\sin\beta$. Drugi pravoulgi trougao VSB ima ugao kod vrha V jednak $\alpha/2$, tako da je $VB = VS/\cos\frac{\alpha}{2}$. konačno se iz trougla ΔVBO dobija poluprečnik $r = OB$ i zapemina kupe.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}r^2\pi H = \frac{1}{3}(VB^2 - VO^2)\pi H = \frac{1}{3}\left(\frac{VS^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - H^2\right)\pi H \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{H^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\beta} - H^2\right)\pi H = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta} - 1\right)H^3. \end{aligned}$$

1991. jun, II grupa

30. (1) Jednačina ima smisla ako je $x > 0$. Tada je ekvivalentna sa $\log_3 x(x+2) = 1$, $x^2+2x = 3$. Kvadratna jednačina ima rešenja $x_1 = -3$, koje se nalazi van domena definisanosti logaritamske jednačine, i drugo rešenje $x_2 = 1$. Rešenje je $x = 1$.

31. (2) Ako je I izraz dat u zadatku, tada je

$$\begin{aligned} I &= \sin^2\phi - (\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi)^2 \\ &\quad +2\cos\alpha\cos\phi(\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi) \\ &= \sin^2\phi - \cos^2\alpha\cos^2\phi - 2\cos\alpha\cos\phi\sin\alpha\sin\phi - \sin^2\alpha\sin^2\phi \\ &\quad +2\cos^2\alpha\cos^2\phi + 2\cos\alpha\cos\phi\sin\alpha\sin\phi \\ &= \sin^2\phi(1 - \sin^2\alpha) + \cos^2\alpha\cos^2\phi \\ &= \cos^2\alpha(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = \cos^2\alpha. \end{aligned}$$

32. (3) Jednačina postaje $\sin x(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$ ekvivalentna disjunkciji jednačina: $\sin x = 0$ ili $\cos x = \frac{1}{2}$. Rešenja su $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
33. (4) Uvođenjem novih promenljivih $u = \frac{1}{3x-y}$ i $v = \frac{1}{x-3y}$ sistem postaje

$$\begin{aligned} 2u - 5v &= 3 \\ u + 2v &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Množenje druge jednačine sa -2 i sabiranje sa prvom, daje $v = -1/5$, zatim je $u = 1$. Rešenje drugog (takođe prostijeg od polaznog) sistema $3x - y = 1$, $x - 3y = -5$ je $(x, y) = (1, 2)$.
34. (5) v. sliku

Neka su SO i AF visine piramide i E središte stranice BC. Trouglovi ΔAFE i ΔSOE se nalaze u istoj ravni, imaju prave uglove kod temena F i O redom i zajednički ugao kod temena E; tako da oni slični trouglovi. Duž AE je visina jednakostraničnog trougla osnove i time je $AE = \sqrt{3}a/2$. Dalje je

$$\tan\angle EAF = \frac{EF}{AF} = \frac{1}{h}\sqrt{AE^2 - h^2} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{3}{4}a^2 - h^2} = \frac{1}{2h}\sqrt{3a^2 - 4h^2},$$

i

$$H = SO = OE\cot\angle OSE = \frac{1}{3}AE\cot\angle OSE = \frac{\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot 2h}{\sqrt{3a^2 - 4h^2}},$$

pa je

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{\frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot ah}{\sqrt{3a^2 - 4h^2}} = \frac{a^3h}{8\sqrt{3a^2 - 4h^2}}.$$

1991. avgust

35. (1) a) Kvadriranje leve i desne strane date jednačine daje kvadratnu jednačinu

$$6-4x-x^2=(x+4)^2, \quad x^2+6x+5=0,$$

čija su rešenja $x_1=-1$ i $x_2=-5$. Rešenje kvadratne jednačine $x_2=-5$ ne zadovoljava početnu jednačinu, koja postaje $\sqrt{1}=-1$, za koren se, po definiciji, uzima pozitivna vrednost. Dakle, rešenje polazne jednačine je $x=-1$.

b) Podkorena funkcija $6-4x-x^2$ ima nule $x_1=-2-\sqrt{10}$ i $x_2=-2+\sqrt{10}$, okrenuta je otvorom ka dole i nenegativna je na intervalu $[-2-\sqrt{10},-2+\sqrt{10}]$. To je domen definisanosti nejednačine. Na intervalu $[-2-\sqrt{10},-4)$ desna strana nejednačine je negativna, tako da je tu nejednačina tačna. Na intervalu $[-4,-2+\sqrt{10}]$ obe strane nejednačine su nenegativne, tako da se kvadriranjem dobija $y=x^2+6x+5=(x+1)(x+5)\le 0$. $y\le 0$ za $x\in[-5,-1]$. Time je skup rešenja $[-2-\sqrt{10},-4]\cup[-4,-1]=[-2-\sqrt{10},-1]$.

36. (2)

$$\log_a b-\log_a a+\log_a a-\log_a b-\log_a x-\log_a \frac{1}{x}=0.$$

37. (3)

$$\begin{aligned}\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} &= \frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}\\ &= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\\ &= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

II način. Poznate smene

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{gde je} \quad t=\tan\frac{\alpha}{2},$$

svode zadatak na racionalnu jednakost

$$\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=t.$$

38. (4) Jednačina $\sin x[3\sin x-\sqrt{3}\cos x]=0$ je ekvivalentna disjunkciji jednačina:

$$\sin x=0 \quad \text{ili} \quad \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rešenja su $x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+l\pi$, $k,l\in \mathbf{Z}$.

39. (5) v. sliku

Neka je A bilo koja od tih šest tačaka. Među pet duži koje polaze iz tačke A postoje bar tri iste boje. Označimo njihove krajnje tačke sa C, D i E. Mora nastupiti jedan od sledeća dva slučaja

i) Među dužima CD, DE, EC bar jedna je iste boje kao duži AC, AD, AE. U tom slučaju, ta duž među CD, DE, EC koja je iste boje i tačka A obrazuju traženi jednobojni trougao.

ii) Nijedna od duži CD, DE i EC nije iste boje sa dužima AC, AD, AE. Tada one među sobom imaju istu boju, tako da je ΔCDE traženi trougao.

1991. septembar

40. (1) a) Ako su ti brojevi x i y, onda je $x+y=10$, $xy=40$. Dalje je $x(10-x)=40$, $x^2-10x+40=0$, tako da je $x=5+i\sqrt{15}$, $y=5-i\sqrt{15}$.

b) Jednačina je definisana za $x\geq 0$. Kvadriranjem leve i desne strane jednačine se dobija

$$x+2\sqrt{x}\sqrt{x+3}+x+3=x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}+x+2,$$

$$x(x+3) = (x+1)(x+2), \quad 0 = 2$$

netačna jednakost. Polazna jednačina nema rešenja, a skup rešenja je prazan skup.

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15},$$

(to je Kardanov problem i rešenje iz srednjeg veka)

41. (2) Koristeći formulu $\log_b a = \log_c a / \log_c b$, dati izraz se transformiše

$$\frac{\log a_2}{\log a_1} \cdot \frac{\log a_3}{\log a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{\log a_{n-1}}{\log a_{n-2}} \cdot \frac{\log a_n}{\log a_{n-1}} = \frac{\log a_n}{\log a_1} = \log_{a_1} a_n.$$

42. (3) Kako je $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, i $\tan(\pi - \delta) = -\tan\delta$, to je

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\gamma} + \frac{\tan\beta}{\tan\gamma} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{-\tan(\alpha+\beta)} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}} = \tan\alpha\tan\beta - 1.$$

II način.

$$\begin{aligned}
\frac{\tan\alpha}{\tan\gamma} + \frac{\tan\beta}{\tan\gamma} &= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\tan\gamma} \\
&= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\frac{\sin(\pi-\alpha-\beta)}{\cos(\pi-\alpha-\beta)}} \\
&= \frac{-\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\
&= \frac{\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \\
&= \tan\alpha\tan\beta - 1.
\end{aligned}$$

43. (4) $2\sin x = \sqrt{2}\sin x/\cos x$, tako da je

$$\sin x\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Poslednja jednačina je ekvivalentna disjunkciji jednačina $\sin x = 0$ ili $\cos x = \sqrt{2}/2$. Rešenja su $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

44. (5) a) Izvršićemo ekvivalentne transformacije datih nejednakosti. Kvadriranjem prva dva izraza se dobija

$$ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4}, \quad \text{tj.} \quad 0 \leq a^2-2ab+b^2, \quad 0 \leq (a-b)^2$$

tačna nejednakost. Slično, kvadriranje leve i desne strane druge nejednakosti daje

$$\frac{(a-b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \quad a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2, \quad 0 \leq (a-b)^2.$$

b) Druga nejednakost se ekvivalentno transformiše

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &\leq 3(a^2+b^2+c^2), \\ a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc &\leq 3a^2+3b^2+3c^2, \\ ab+bc+ca &\leq a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$

Poslednja nejednakost je poseban slučaj jedne opšte nejednkasti. Bez ograničenja opštosti, može se pretpostaviti da je $a \leq b \leq c$, odnosno da je $a = b - x$ i $c = b + x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Treba dakle pokazati

$$b^2 - bx + b^2 + by + b^2 - bx + by - xy \leq b^2 - 2bx + x^2 + b^2 + b^2 + 2by + y^2,$$

što se svodi na tačnu nejednakost $-xy \leq x^2 + y^2$.

1992. jun

45. (1) a) Zamena datog rešenja u jednačinu daje

$$\begin{aligned} a^2b^2 - 2ab + 1 + m(ab-1) + a^2b^2 - 1 &= 0, \\ m(ab-1) + 2ab(ab-1) &= 0. \end{aligned}$$

Ako je $ab - 1 = 0$, $ab = 1$, $a = 1/b$, tada je $m \in \mathbf{R}$ proizvoljan broj. Ako je $ab - 1 \neq 0$, tada je vrednost parametra $m = -2ab$.

b) Možemo pisati npr.

$$|x-1| - 2 = \pm 3, \quad |x-1| = \pm 3 + 2.$$

Ako se izabere znak + dobija se $|x-1| = 5$, $x - 1 = \pm 5$, odakle slede dva rešenja $x_1 = 6$ i $x_2 = -4$. Ako se izabere znak $-$: $|x-1| = -1$, dobije se jednačina bez rešenja.

46. (2) Ako je $x > 0$, $x \neq 1$, onda je

$$\log_7 x + \log_x 7 \geq 2, \quad \log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} \geq 2.$$

Smenom $\log_7 x = t$ se dobija

$$t + \frac{1}{t} \geq 2, \quad \frac{(t-1)^2}{t} \geq 0, \quad t \geq 0, \quad \log_7 x \geq 0,$$

tako da je rešenje $x > 1$.

47. (3)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \frac{\sin\alpha}{1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} &= \sin\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha, \\
\cos^3\alpha + \sin^3\alpha &= \sin\alpha(1 - \cos^2\alpha) + \cos\alpha(1 - \sin^2\alpha), \\
\cos^3\alpha + \sin^3\alpha &= \sin^3\alpha + \cos^3\alpha.
\end{aligned}$$

48. (4)

$$\cos x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0,$$

jednačina je ekvivalentna disjunkciji jednačina: $\cos x = 0$ ili $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tako da su rešenja $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi$, $k, l, m \in \mathbf{R}$.

49. (5) v. sliku

Neka je O centar kruga i F, G i H dodirne tačke kruga i stranica CD, DA i AB respektivno. Neka su α i δ uglovi trapeza kod temena A i D, i neka je $x = AH$, $y = HB$. Tada je $\alpha + \delta = \pi$. Iz trougla ΔOFD sledi: $\tan\frac{\delta}{2} = \frac{R}{a-b}$, dalje je

$$x = \frac{R}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\cot\frac{\delta}{2}} = \frac{R}{\frac{a-b}{R}} = \frac{R^2}{a-b}.$$

Slično se dobija $y = R^2/b$. Površina se dobija iz delova

$$\begin{aligned} P &= P_{AHOG} + P_{BEOH} + P_{CFOE} + P_{DGOF} \\ &= xR + yR + bR + (a-b)R \\ &= \frac{R^3}{a-b} + \frac{R^3}{b} + aR \\ &= aR\left[1 + \frac{R^2}{b(a-b)}\right]. \end{aligned}$$

1992. jun, II grupa

50. (1) a) Smena rešenja u jednačinu daje

$$a^2b^2 - 2ab + 1 - 2a^2b^2 + 2ab + m = 0,$$

odakle je odmah $m = a^2b^2 - 1$.

b) Neka je najpre $|x+1| - 2 = 3$; tada je $|x+1| = 5$, tako da je $x+1 = 5$, tj. $x = 4$, ili je $x + 1 = -5$, tj. $x = -6$. Ako je $|x+1| - 2 = -3$, dobija se $|x+1| = -1$ nemoguća jednačina. Rešenja su dakle $x_1 = 4$ i $x_2 = -6$.

51. (2) Nejednačina se može napisati u obliku

$$\log_x 3 - 4 + \frac{4}{\log_x 3} \geq 0.$$

Smena $t = \log_x 3$ daje nejednačinu

$$t - 4 + \frac{4}{t} \geq 0, \qquad \frac{(t-2)^2}{t} \geq 0$$

koja je tačna ako je $t > 0$, $\log_x 3 > \log_x 1$. Logaritamska funkcija je rastuća ako je $x > 1$, što je i rešenje nejednačine.

52. (3)

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} &= \frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta},\\ \cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cos^2\beta &= \sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta,\\ \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) &= \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha).\end{aligned}$$

53. (4) Jednačina $\sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$ je ekvivalentna disjunkciji jednačina: $\sin x=0$ ili $2\cos x-\sqrt{2}=0$, $\cos x=\sqrt{2}/2$. Rešenja su $x=k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+2l\pi$, $k,l\in\mathbf{R}$.
54. (5) Isti zadatak kao za prethodnu grupu.

1992. septembar

55. (1) Jednačina se transformiše u oblik

$$\begin{aligned}mp-mx-px+x^2 &= 1-mx-px+pmx^2,\\ (1-mp)x^2 &= 1-mp, \quad x=\pm 1.\end{aligned}$$

Neka je $R=\{-1,1\}$. Kompletna diskusija rešenja u zavisnosti od vrednosti parametara je duža, videti dijagram. Ako je $mp=1$, onda su rešenja $R\setminus\{p\}$. Ako je $p=1$ ili $m=1$, onda je rešenje samo -1. Ako je $p=-1$ ili $m=-1$, onda je rešenje samo 1. Ako je $(m,p)=(-1,1)$ ili $(m,p)=(1,-1)$, onda jednačina nema rešenja. U svim drugim slučajevima vrednosti m i p, skup rešenja je R.
56. (2) a) $2^{x+2}=2^{-2x}$, $\quad 3x=-2$, $\quad x=-2/3$.

b) Antilogaritmovanje daje $2^x-7=2^{3-x}$, ako se uvede smena $2^x=y$, dobija se $y^2-7y-8=0$. Rešenje $y_1=8$ daje $x=3$; dok rešenje $y_2=-1$ ne daje rešenje polazne jednačine jer je $e^x>0$ za sve $x\in\mathbf{R}$.
57. (3)

$$\begin{aligned}\sin^4\alpha+\cos^4\alpha &= (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\\ &= 1-\frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2\\ &= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{2-\sin^2 2\alpha}{2}\\ &= \frac{3+1-2\sin^2 2\alpha}{4}=\frac{3+\cos 4\alpha}{4}.\end{aligned}$$

58. (4) Data jednačina je ekvivalenta sa $\sin x(\sqrt{2} - 2\cos x) = 0$, što je ekvivalentno disjunkciji jednačina: $\sin x = 0$ ili $\cos x = \sqrt{2}/2$. Dakle, rešenja su $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
59. (5) v. sliku

Trougao ΔABE ima površinu $P = a^2/2$. S druge strane je $P = \frac{1}{2}BE \cdot AF = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot AF$, tako da je $h = AF = \frac{2}{\sqrt{5}}a$.

Dužinu AG odredimo iz trougla ΔABG pomoću kosinusne teoreme

$$\begin{aligned} AG^2 &= AB^2 + BG^2 - 2 \cdot AB \cdot BG\cos\beta \\ &= a^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 2a \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= a^2 + \frac{5}{16}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{13}{16}a^2. \end{aligned}$$

Time je $AG = \sqrt{13}a/4$.

1992. septembar, II grupa

60. (1) Najpe je $f(a) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Prema Vijetovim formulama

$$x_1 + x_2 = -(a - 2), \quad x_1x_2 = -(a + 3),$$

tako da je

$$f(a) = (a - 2)^2 + 2(a + 3) = a^2 - 2a + 10 = (a - 1)^2 + 9,$$

pa se najmanja vrednost postiže za $a = 1$.

Napomena. Može se tražiti i teme parabole $f(a)$, $a \in \mathbf{R}$.

61. (2) Iz razloga definisanosti stepena mora biti $x > 0$ i $y > 0$. Iz druge jednačine sledi $y = x^{-3}$; smena u prvu jednačinu daje

$$x^{4x+x^{-3}} = x^{-15\left(x^{-3}-\frac{x}{3}\right)}.$$

Očigledno je $x_1 = 1$ rešenje poslednje jednačine. Na skupu $x > 0$ i $x \neq 1$ jednačina je ekvivalentna jednačini izložilaca

$$4x + x^{-3} = -15\left(x^{-3} - \frac{x}{3}\right),$$

odakle je $x^4 = 16$. Njena (realna) rešenja su $x_2 = 2$ i $x_3 = -2$. Pošto imaju smisla samo pozitivna rešenja to je $(x_1, y_1) = (1, 1)$ i $(x_2, y_2) = (2, 1/8)$.

62. (3)

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin\alpha}.\end{aligned}$$

63. (4) $\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x$, uz uslov $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Data jednačina je ekvivalentna disjunkciji jednačina $\sin x = 0$ ili $\cos x = \sqrt{2}/2$. Rešenja su $x = k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

64. (5) v. sliku

Neka je V proizvoljan vrh tetraedra, C podnožje visine iz V na suprotnu stranu i O centar opisane sfere. Kako je tetraedar pravilan, toje O i težište tetraedra, i time tačka O deli visinu VC u razmeri $3:1$. Ako je A proizvoljan drugi vrh tetraedra, tada je AC poluprečnik kružnice opisane oko baze, jednak je $2/3$ visine trougla baze. Iz trougla ΔACV primenom Pitagorine teoreme sledi

$$r = OC = \frac{1}{4}VC = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}a.$$

Ako je b dužina stranice kocke upisane u sferu, tada je njena dijagonala $\sqrt{3}b$ jednaka prečniku $2r$ sfere. Time je

$$3b^2 = 4r^2 = 4\frac{2}{4\cdot 4\cdot 3}a^2 = \frac{a^2}{6}, \quad \text{tj.} \quad b = \frac{a^2}{3\sqrt{2}}.$$

1993. jun

65. (1) Neka je L leva strana jednakosti, tada je

$$\begin{aligned} L^3 &= 20+14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2(20-14\sqrt{2})} \\ &\quad +3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})^2}+20-14\sqrt{2} \\ &= 40+3\sqrt[3]{(400-392)(20+14\sqrt{2})}+3\sqrt[3]{(400-392)(20-14\sqrt{2})} \\ &= 40+6L, \end{aligned}$$

odakle je $L^3 = 40+6L$. Kako je $L^3 = 4^3 = 64$ dobija se $40+6L = 64$, $L = 4$.

66. (2) Ekvivalentna eksponenecijalna jednačina je

$$3^x - 8 = 3^{2-x}, \quad 3^{2x} - 8\cdot 3^x = 3^2,$$

smena $3^x = t$, daje $t^2 - 8t - 9 = 0$. Dakle, $t_1 = -1 \Rightarrow 3^x = -1$ što nema rešenja; drugo rešenje daje $t_2 = 9$, $x = 2$. Rešenje je $x = 2$.

67. (3) Ako je L leva strana, tada

$$\begin{aligned} L &= \tan\alpha+\tan\beta-\tan(\alpha+\beta) = \tan\alpha+\tan\beta-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\ &= (\tan\alpha+\tan\beta)\left(1-\frac{1}{1-\tan\alpha\tan\beta}\right) \\ &= (\tan\alpha+\tan\beta)\frac{-\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \\ &= -\tan\alpha\tan\beta\tan(\alpha+\beta) = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma. \end{aligned}$$

68. (4) Jednačina se može transformisati na oblik

$$2\sin 4x\cos 2x = 3\cos^2 2x, \quad 4\sin 2x\cos^2 2x = 3\cos^2 2x,$$

$$\cos^2 2x(3-4\sin 2x) = 0.$$

Poslednja jednačina je ekvivalentna disjunkciji jednačina $\sin 2x = 3/4$ ili $\cos^2 2x = 0$. Rešenja su $x = (-1)^m \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4} + \frac{m\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $m, k \in \mathbf{Z}$.

69. (5) v. sliku

Neka su a i b dužine osnovica i c dužina kraka trapeza, tada je $a+b = c_1+d_1+c_2+d_2 = 2c$ i površina trapeza $P = (a+b)R = 2cR$. Neka je O centar kruga, EF tetiva, S središte tetive i G središte kraka BC. Duž OG je polovina srednje linije trapeza $OG = c/2$, slični su trouglovi $\Delta OSF \sim \Delta GFO$ (pravougli i imaju dva jednaka ugla s normalnih kracima), tako da je

$$\frac{t}{2} : R = R : \frac{c}{2}, \quad c = \frac{4R^2}{t}.$$

Time je $P = 8R^3/t$.

1993. septembar

70. (1) Jednačina se može predstaviti u obliku

$$\frac{4}{(2x-3)(3x-2)} - \frac{x-2}{2(3x-2)} = \frac{2x+1}{5(2x-3)}$$

i za $x \neq \frac{2}{3}$, $x \neq \frac{3}{2}$ ekvivalentna je jednačini $40 - 5(2x-3)(x-2) = (2x+1)2(3x-2)$, $22x^2 - 37x - 14 = 0$, čija su rešenja $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{7}{22}$.

71. (2) Data jednačina je ekvivalentna jednačini $7 + 2^{-x} = 2^{x+3}$. Ako uvedemo smenu $2^x = t$, dobija se $8t = 7 + \frac{1}{t}$, tj. $8t^2 - 7t - 1 = 0$. Rešenja

poslednje jednačine su $t_1 = 1$ i $t_2 = -\frac{1}{8}$. Drugo rešenje ne dolazi u obzir jer mora biti $t > 0$, pa je $2^x = 1$ i $x = 0$.
72. (3)

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 3x + \sin 2x + \sin 4x &= 2\sin 2x \cos x + 2\sin 3x \cos x \\
&= 2\cos x(\sin 2x + \sin 3x) \\
&= 4\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x.
\end{aligned}$$

II način.

$$\begin{aligned}
L &= 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{5x}{2}\cdot 2\cos x\cos\frac{x}{2} = 4\cos x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}.
\end{aligned}$$

73. (4) v. sliku

Označimo $MN = QP = x$ i $MQ = NP = y$ stranice pravougaonika površine S, duži $DQ = DP = BM = BN = t$ i stranicu romba sa a. Tada su slični trouglovi AMQ i OMN, a takođe i trouglovi MBN i MOQ. Odavde je

$$\frac{a-t}{R} = \frac{y}{x} \quad \text{i} \quad \frac{t}{R} = \frac{x}{y}.$$

Iz poslednje dve relacije nalazimo $\frac{a}{R} - \frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, pa je $a = R \cdot \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{4R^2}{S}$, jer je $x^2 + y^2 = (2R)^2$ i $xy = S$.

II način. $DP = R\tan\frac{\alpha}{2}$, $PC = R\cot\frac{\alpha}{2}$,

$$a = DP + PC = R(\tan\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\alpha}{2}) = \frac{R}{\sin\alpha 2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Dalje je

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{2R},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{y}{2R},\quad \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha 2=\frac{xy}{4R^2},$$

pa je $a=R\frac{4R^2}{xy}=\frac{4R^3}{S}$.

1993. septembar, II grupa

74. (1) Zamena u jednačinu daje

$$(2a-1)\cdot 25-15b+25=0,\quad 10a-3b=0.$$

75. (2) Iz prve jednačine je $y=1+\log_3 x$. Drugu logaritmujmo sa osnovom 3: $\log_3 x^y=12$, $y\log_3 x=12$. Smena daje

$$(1+\log_3 x)\log_3 x=12.$$

Može se uvesti nova oznaka $t=\log_3 x$, i rešiti kvadratna jednačina $t^2+t-12=0$, iz koje je $t_1=-4$, $t_2=3$. Dakle, $\log_3 x=-4\Rightarrow x=3^{-4}\Rightarrow y=-3$. Ako je $\log_3 x=3\Rightarrow x=3^3\Rightarrow y=4$. Rešenja su $(x,y)\in\{(27,4),(\frac{1}{81},-3)\}$.

II način. Iz prve jednačine sledi $\log_3 x=y-1$, $x=3^{y-1}$. Smena u drugu jednačinu daje $3^{(y-1)y}=3^{12}$, $y^2-y=12$, $(y-4)(y+3)=0$.

76. (3)

$$\frac{\frac{\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

77. (4) Jednačina $\sin x(\cos x-1)=0$ je ekvivalentna disjunkciji jednačina $\sin x=0$ ili $\cos x=1$. Rešenja su $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

78. (5) $x=0$.

79. (6) Ako je $s=\frac{a+b+c}{2}=21/2$ poluobim trougla, njegova površina se može dobiti iz Heronovog obrasca

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=21cm^2.$$

Najkraća visina trougla pada na najdužu stranicu, naime c, te je visina

$$h_c=\frac{2P}{c}=\frac{2\cdot 21\cdot 2}{15}=\frac{28}{5}=5,6cm^2.$$

1994. juni

80. (1) Za $a \neq b \neq c \neq a$ leva strana date jednakosti jednaka je

$$\frac{-(b-c)^2-(a-c)^2-(a-b)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{-2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

a desna

$$\frac{2(b-c)(c-a)+2(a-b)(c-a)+2(a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

što je takođe jednako $\frac{-2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

II dokaz. Sabiranjem levih i desnih strana jednakosti

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c},$$

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{b-a},$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} - \frac{1}{c-b}.$$

81. (2) Za $x > 8$ jednačina postaje

$$\log_{10}\sqrt{x-8} + \log_{10}\sqrt{2x+1} = \log_{10} 10,$$

tj. $\sqrt{(x-8)(2x+1)} = 10$, odnosno $(x-8)(2x+1) = 100$, tj. $2x^2-15x-108 = 0$. Rešenja poslednje jednačine su $x_1 = 12$ i $x_2 = -4,5$. Zbog uslova $x > 8$ samo je prvo rešenje i rešenje date jednačine.

82. (3)

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} &= \frac{\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} \\ &= \frac{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},\end{aligned}$$

pri tome je $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

83. (4) Iz

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2 \quad \text{sledi} \quad d_1^2 + d_2^2 = 100.$$

Kako je $d_1 + d_2 = 14$, to je $d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2 = 196$, pa je $d_1d_2 = 48$, a površina romba je $P = \frac{d_1d_2}{2} = 24$.

84. (5) Za $x = 2$ imamo $f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$, a za $x = \frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4}$. Ako drugu jednačinu pomnožimo sa -3 i dodamo prvoj dobijamo $-8f(2) = -\frac{13}{4}$, pa je $f(2) = -\frac{13}{32}$.

1994. septembar

85. (1) Neophodno je da diskriminanta bude nenegativna:

$$D = 4n^2 - 4(n-2)(n-3) = 4(5n-6) \geq 0, \quad n \geq \frac{6}{5}.$$

Po Vijetovim formulama zbir korena jednačine je $\frac{2n}{n-2}$, a proizvod $\frac{n-3}{n-2}$. Oba korena su pozitivna ako i samo ako je $\frac{2n}{n-2} > 0$ i $\frac{n-3}{n-2} > 0$. Rešenja prve nejednačine su $n < 0$ ili $n > 2$, a druge $n < 2$ ili $n > 3$. Dakle, treba da bude $n < 0$ ili $n > 3$, a imajući u vidu uslov $D \geq 0$ mora da bude $n > 3$.

86. (2) Ako su posmatrane funkcije jednake, onda su za $x > 0$ i njihovi izvodi jednaki, tj.

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{ax+b},$$

odakle je $a = 0$ ili $x = ax + b$, tj. $a = 1$ i $b = 0$. U prvom slučaju data jednakost postaje $b = \log b$ i ne važi ni za jedno b (jer je $b > \log_e b$ za sve $b > 0$).

II način. Ako x teži ka 0, $x \to 0$, dobija se $\log b = -\infty$, $b = 0$. Time je $a \log x = \log(ax)$, zamena $x = 1$ daje $0 = \log a$, $a = 1$.

Ako je $a = 1$, $b = 0$ data jednakost je $\log_e x = \log_e x$ i važi za sve $x > 0$. Dakle $(a, b) = (1, 0)$.

87. (3)

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} &= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1}{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 1} \\ &= \frac{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{2}{3},\end{aligned}$$

($\alpha \neq k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$).

88. (4) Jednačina se može napisati u obliku $\cos x(4\sin^2 x - 3) = 0$, pa je $\cos x = 0$ ili $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rešenja su $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi$, $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

89. (5) Dijagonala A_1A_3 je stranica kvadrata $A_1A_3A_5A_7$ upisanog u krug poluprečnika r, pa je $A_1A_3 = \frac{2r}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$cm.

Ako je r poluprečnik, a stranica i d tražena dijagonala, direktan račun daje $a = 2R\sin\pi 8$,

$$d = 2a\cos\frac{\pi}{8} = 4r\sin\pi 8\cos\pi 8 = 2r\sin\pi 4 = 5\sqrt{2}.$$

1995. jun

90. (1) Iz druge jednačine sistema sledi $x - y + 1 = 1$, tj. $x = y$, pa iz prve dobijamo $15^x = 225$, tj. $x = y = 2$. Rešenje sistema je $(2, 2)$.

91. (2) Jednačina ima jednaka rešenja ako je njena diskriminanta jednaka nuli:

$$D = b^2 - 4ac = (r-5)^2 - 4(r+1)^2 = 0, \quad -3r^2 - 18r + 21 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = -3 \pm 4,$$
$$r_1 = 1, \quad r_2 = -7.$$

92.3. (a)

$$\frac{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}{|\sqrt{2}\cos\alpha|} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}}{\sqrt{2}|\cos\alpha|} = \frac{\sqrt{2}|\cos\alpha|}{\sqrt{2}|\cos\alpha|} = 1,$$

za $\cos\alpha \neq 0$, tj. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(b) Ako je L izraz sa leve strane, tada

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha} \\ &= \frac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha(\sin^4\alpha - 1) + \cos^2\alpha(\cos^4\alpha - 1)} \\ &= \frac{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{-\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha + 1)} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Takođe, može se koristiti formula

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2 x\cos^2\alpha + \cos^4\alpha).$$

93. (4) Jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} = 0$$

odnosno $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, što važi istovremeno, pa su rešenja $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

94. (5) v. sliku

Neka je E tačka osnovice AB takva da je $AE = BE = AD = DC$. Zbog $AE = EC = EB$ trougao ABC je pravougli, a zbog $EB = CD$ i $EB \parallel CD$ četvorougao $AECD$ je romb. Površina trapeza $ABCD$ je

$$P = P_{ABC} + \frac{1}{2}P_{AECD} = \frac{ab}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{2} = \frac{3}{4}ab.$$

II način. Ako je F podnožje visine iz temena C, iz sličnosti trouglova $\Delta ACB \sim \Delta CFB$ sledi $b^2 = x \cdot AB$, $x = b^2/AC$. Iz sličnosti $\Delta ACB \sim \Delta AFC$ se dobija $a^2 = y \cdot AB$, $y = a^2/AB$. Sada kao poznata formula, ili iz sličnosti $\Delta AFC \sim \Delta CFB$, sledi $h^2 = xy = a^2b^2/(AB)^2$. Time je

$$P = \frac{AB + AB/2}{2} \cdot \frac{ab}{AB} = \frac{3ab}{4}.$$

95.6. Možemo eliminisati c (i jedan uslov), $c = -a - b$, tako da je

$$a^2 + b^2 + (a+b)^2 = 1, \quad a^2 + b^2 + ab = 1/2.$$

Kvadriranje leve i desne strane poslednje jednakosti daje

$$a^4 + b^4 + a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2a^3b + 2ab^3 = 1/4.$$

Sada je

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= a^4+b^4+(a+b)^4 \\ &= a^4+b^4+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = 1/2. \end{aligned}$$

II način. Odredimo vrednosti i za dva pomoćna izraza

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ (ab+bc+ca)^2 &= a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c) \\ (a^2+b^2+c^2)^2 &= a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ ab+bc+ca &= -1/2 \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= 1/4 \\ a^4+b^4+c^4 &= 1/2. \end{aligned}$$

III način. Treći dokaz je kratak:

$$a^2+b^2 = 1-c^2,$$

$$a+b=-c \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2+2ab=c^2 \quad \Rightarrow \quad ab=\frac{2c^2-1}{2},$$

tako da je

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= (a^2+b^2)^2-2a^2b^2+c^4 \\ &= (1-c^2)^2-2\left(\frac{2c^2-1}{2}\right)^2+c^4=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1995. septembar

96. (1) Neophodno je da bude $a+x>0$. Množenjem leve i desne strane jednačine sa $\sqrt{a+x}$ dobija se $a+x+\sqrt{(2a+x)(a+x)}=a$, tj.

$$\sqrt{(2a+x)(a+x)}=-x.$$

Poslednja jednačina je za $x<0$ ekvivalentna jednačini $(2a+x)(a+x)=x^2$, $x^2+3ax+2a^2=x^2$, čije je rešenje za $a>0$, $x_1=-\frac{2}{3}a$. Kako za ovo rešenje važe uslovi $a+x>0$ i $x<0$, to je $x_1=-\frac{2}{3}a$ i rešenje polazne jednačine.

97. (2) Kako je $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 7ab+2ab = 9ab$, to je $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{9ab}$, pa je

$$\log\frac{|a+b|}{3} = \log\frac{3\sqrt{ab}}{3} = \frac{1}{2}\log|ab| = \frac{1}{2}(\log|a|+\log|b|).$$

98. (3)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \\ &= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)} \\ &= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} \\ &= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha} \\ &= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha, \end{aligned}$$

za $\cos\alpha \neq 0$, tj. $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

II način. Sličan je dokaz uz prethodno oslobađanje od razlomka

$$\begin{aligned} \cos^6\alpha+\cos^4\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha &= 1 \\ \cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha &= \sin^2\alpha+\cos^2\alpha, \\ \cos^2\alpha &= \cos^2\alpha. \end{aligned}$$

99. (4) Jednačina je ekvivalentna jednačini $2\sin x\cos x - \sin x = 0$, $\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$, pa je $\sin x = 0$ ili $\cos x = \frac{1}{2}$ tj. $x = k\pi$, ili $x = \pm\frac{\pi}{3}+2l\pi$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

100. (5) v. sliku

Neka je O središte kruga upisanog u trapez i $AM = AE = x$, $DM = y$, $CN = z$, $BN = BE = b$. Uglovi EAD i ADC, a takođe i EBC i BCD su suplementni i njihove simetrale se seku pod pravim uglom, pa su trouglovi AOD i BOC pravougli i (Euklidov stav) važi $R^2 = xy$ i $R^2 = bz$, pa je $y = \frac{R^2}{x}$ i $z = \frac{R^2}{b}$, a kako je $y+z = a$, to iz $\frac{R^2}{x}+\frac{R^2}{b} = a$ nalazimo da je $x = \frac{R^2 b}{ab-R^2}$. Površina trapeza je

$$P = \frac{(x+b)+a}{2}\cdot 2R = R\left(\frac{R^2 b}{ab-R^2}+b+a\right) = aR\frac{ab+b^2-R^2}{ab-R^2}.$$

101. (6) Kako je $\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a}$, to je

$$f(x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{x}{a} + 1.$$

Kvadratna funkcija $y = ax^2 + bx + c$ ima minimum za $x_T = -\frac{b}{2a}$, $y_T = y(x_T)$. Ovde se dobija $x_T = \frac{a}{2}$ i $y_T = \frac{1}{2}$. Dakle $f(x) \geq \frac{1}{2}$. Jednakost važi ako i samo ako je $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$.

1996. jun

102. (1)

$$\begin{aligned}
J &= \frac{(a^2 - 2a + 1)(c - b) + (b^2 - 2b + 1)(a - c) + (c^2 - 2c + 1)(b - a)}{(a - b)(a - c)(c - b)} \\
&= \frac{a^2c - 2ac + c - a^2b + 2ab - b + ab^2 - 2ab + a - b^2c + 2bc - c + bc^2}{(a - b)(a - c)(c - b)} \\
&\quad \frac{-2bc + b - ac^2 + 2ac - a}{} \\
&= \frac{ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a}{(a - b)(a - c)(c - b)} \\
&= \frac{ab(b - a) + c^2(b - a) + c(a^2 - b^2)}{(a - b)(a - c)(c - b)} \\
&= \frac{(a - b)(-ab - c^2 + ac + bc)}{(a - b)(a - c)(c - b)} \\
&= \frac{(a - b)(a - c)(c - b)}{(a - b)(a - c)(c - b)} = 1.
\end{aligned}$$

103. (2) Množenjem leve i desne strane jednačine 2^{2x+3} dobija se

$$4\cdot(2^{2x+1})^2+8\cdot 2^{2x+1}-21=0.$$

Smenom $y=2^{2x+1}$ se dobija kvadratna jednačina $4y^2+8y-21=0$, čija su rešenja $y_1=-7/2$, što ne daje (realno) rešenje po x, i $y_2=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}\log_2 3-1$. Rešenje je $x=\log_4 3-1$.

104. (3) Uvodi se smena

$$u=\sin(-2x),\quad v=\tan 5y,$$

tako da imamo sistem od dve kvadratne jenačine sa dve nepoznate

$$\begin{aligned} u^2-(3-\sqrt{2})v &= \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ v^2+(3-\sqrt{2})u &= \frac{3\sqrt{2}-1}{2}. \end{aligned}$$

Oduzimanjem dve poslednje jednačine se dobija sistem

$$\begin{aligned} u^2-(3-\sqrt{2})v &= \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ (u+v)(u-v-3+\sqrt{2}) &= 0. \end{aligned}$$

Poslednji sistem je ekvivalentan disjunkciji dva sistema

$$\begin{aligned} u^2-(3-\sqrt{2})v &= \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ v &= -u; \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} u^2-(3-\sqrt{2})v &= \frac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ v &= u-3+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

I) Rešenje prvog sistema. Zamena $-u$ umesto v u prvoj jednačini daje jednačinu

$$u^2+(3-\sqrt{2})v-\frac{3\sqrt{2}-1}{2}=0.$$

Dalje je $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, a drugo rešenje $u_2 = \frac{-6+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{6-\sqrt{2}}{2}$.

(a) Dakle,

$$\sin(-2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 5y = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa su rešenja

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, \quad y = -\frac{1}{5}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{5}.$$

(b) Jednačina $\sin(-2x) = \frac{-6+\sqrt{2}}{2}$ nema rešenja.

(II) Rešenje drugog sistema. Smena data drugom jednačinom daje

$$u^2 - (3-\sqrt{2})(u-3+\sqrt{2}) - \frac{3\sqrt{-1}}{2} = 0,$$

ili

$$u^2 - (3-\sqrt{2})u + \frac{23-15\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Poslednja jednačina nema rešenja jer je njena diskrimainatna negativna

$$D = (3-\sqrt{2})^2 - 2(23-15\sqrt{2}) = 24\sqrt{2} - 35 < 0.$$

105. (4) I način. Ako je I izraz sa leve strane date jednakosti, tada

$$\begin{aligned} I &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &= \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha \\ &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1. \end{aligned}$$

II način.

$$\begin{aligned} I &= \sin^4\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha(1-\sin^2\alpha) + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &= \sin^2\alpha(\sin^4\alpha - \cos^4\alpha) + \cos^4\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &= \sin^2\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\cdot 1 + \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha \\ &= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1. \end{aligned}$$

III način.

$$\begin{aligned} \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 \\ &= \sin^6\alpha + 3\sin^4\alpha\cos^2\alpha \\ &\quad +3\sin^2\alpha\cos^4\alpha + \cos^6\alpha \\ &= \sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\cdot 1 + \cos^6\alpha. \end{aligned}$$

106. (5) v. sliku

Dužinu odsečka AC označimo sa x. Iz pravouglog trougla ΔAEC prema Pitagorinoj teoremi sledi

$$EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{x^2 - 144}.$$

Kako je $BE : EC = 5 : 9$, to je

$$BC = BE + EC = \frac{14}{9}EC = \frac{14}{9}\sqrt{x^2 - 144}.$$

Površina trougla ΔABC jednaka je $\frac{1}{2}BD \cdot AC$, a takođe i $\frac{1}{2}AE \cdot BC$, tako da izjednačavanje daje

$$\frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}AE \cdot BC; \quad 11,2x = 12\frac{14}{9}\sqrt{x^2 - 144}.$$

Poslednja jednačina se može napisati u obliku

$$3x = 5\sqrt{x^2 - 144}.$$

Kvadriranje daje $x^2 = 225, \quad x = \pm 15$. Zamenom u prethodnu jednačinu proveravamo da je $x = 15$ jedino rešenje. Dakle, dužina strane AC je 15.

1996. septembar

107. (1) Dati polinom je pozitivan za svako x ako je

$$\begin{aligned} r^2 - 1 &> 0, \\ (r-1)^2 - (r^2 - 1) &< 0. \end{aligned}$$

Prva nejednakost daje $|r| > 1$, dok je druga ekvivalentna sa $(r-1)(r-1-r-1) < 0$, $-2(r-1) < 0$, $r > 1$. Ako zamenimo još vrednost $r = 1$, polinom postaje identički jednak 1. Dakle, sva rešenja su data nejednačinom $r \geq 1$.

108. (2) Prema definiciji logaritma

$$2^{5-x} = 2^x - 4,$$

$$2^5/2^x = 2^x - 4.$$

Smena $y = 2^x$ daje

$$2^5/y = y - 4,$$

$$y^2 - 4y - 32 = 0;$$

odakle se dobijaju rešenja za y: $y_1 = -4$ i $y_2 = 8$. Iz $2^x = 8$ se dobija jedino rešenje $x = 3$.

109. (3) Ako je I dati izraz, onda je

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} - \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}\right)\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1}\right)\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ &= \frac{1-(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ &= -\frac{(1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ &= -\frac{2\cos^2\alpha\cdot 2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = -4. \end{aligned}$$

Varijanta dokaza:

$$\begin{aligned} I &= \frac{(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\tan\alpha-\cot\alpha)^2}{\tan^2\alpha-\cot^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ &= \frac{\tan^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha+\cot^2\alpha-\tan^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha-\cot^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} \\ &\quad\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \\ &= \frac{4\tan\alpha\cot\alpha}{\frac{sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}}\cdot\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -4.$$

110. (4) Jednačina ima smisla ako je $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Množenjem jednačine sa $\cos^2 x$, izrazom koji nije nula na domenu jednačine, i korišćenjem formule $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, dobija se

$$8\cos^4 x + 2\cos^2 x - 3 = 0.$$

Uz oznaku $t = \cos x$ dobija se bikvadratna jednačina

$$8t^4 + 2t^2 - 3 = 0$$

čija su rešenja $t_1 = \sqrt{2}/2$ i $t_2 = -\sqrt{2}/2$. Dakle, $\cos x = \sqrt{2}/2$ ili $\cos x = -\sqrt{2}/2$. Prva jednačina ima dva niza rešenja

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Druga jednačina ima rešenja

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi p, \quad p \in \mathbf{Z}; \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi q, \quad q \in \mathbf{Z}.$$

Sva neđena rešenja pripadaju domenu dopustivih vrednosti nepoznate polazne jednačine. Sva rešenja se mogu zapisati jednom formulom

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

111. (5) v. sliku

Neka je $ABCD$ dati četvorougao čije se dijagonale AC i BD seku u tački F. Neka su K i L podnožja normala iz centra O, i istovremeno i sredine dijagonala BD i AC respektivno, i neka je $OK = 8cm$, $OL = 9cm$. Trougao ΔOKD je pravougli (polovina jednakokrakog trougla), tako da je

$$KD = \sqrt{OD^2 - OK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15cm = \frac{1}{2}BD.$$

Slično je

$$LC = \sqrt{OC^2 - OL^2} = \sqrt{17^2 - 9^2} = \sqrt{208}cm = 4\sqrt{13}cm = \frac{1}{2}AC.$$

Četvorougao $OLFK$ je pravougaonik. Iz pravouglih trouglova ΔAFB, ΔBFC, ΔCFD i ΔAFD se dobija

$$\begin{aligned}
DC &= \sqrt{24^2 + (4\sqrt{13} - 8)^2} && = \sqrt{4^2 6^2 + 4^2(\sqrt{13} - 2)^2} \\
&= 4\sqrt{6^2 + (\sqrt{13} - 2)^2} && = 4\sqrt{36 + 13 - 4\sqrt{13} + 4} \\
&= 4\sqrt{2^2 \cdot 13 - 4\sqrt{13} + 1} && = 4(2\sqrt{13} - 1)cm, \\
AD &= \sqrt{24^2 + (4\sqrt{13} + 8)^2} && = 4(2\sqrt{13} + 1)cm, \\
BC &= \sqrt{6^2 + (4\sqrt{13} - 8)^2} && = 2(8 - \sqrt{13})cm, \\
AB &= \sqrt{6^2 + (4\sqrt{13} + 8)^2} && = 2(8 + \sqrt{13})cm.
\end{aligned}$$

1997. jun

112. (1) Racionalizacijom imenioca datog izraza I se dobija

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n} - \sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n} + \sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}\right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n} - \sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n} - \sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{(m+x)(x+n) - 2\sqrt{(m^2-x^2)(x^2-n^2)} + (m-x)(x-n)}{(m+x)(x+n) - (m-x)(x-n)}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{mx + mn + x^2 + nx - 2\sqrt{(m^2-x^2)(x^2-n^2)} + mx - mn - x^2 + nx}{mx + mn + x^2 + nx - mx + mn + x^2 - nx}\right)^{-2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{2(m+n)x - 2\sqrt{(m^2-x^2)(x^2-n^2)}}{2(x^2+mn)}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{(m+n)\sqrt{mn} - \sqrt{(m^2-mn)(mn-n^2)}}{2mn}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{(m+n)\sqrt{mn} - \sqrt{mn}(m-n)}{2mn}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{\sqrt{mn}(m+n-m+n)}{2mn}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{mn}}{m}\right)^{-2} = \frac{m}{n}.
\end{aligned}
$$

II način. Reciprociranjem i kvadriranjem slično sledi

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\frac{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n} + \sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n} - \sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}\right)^2 \\
&= \frac{(m+x)(x+n) + 2\sqrt{(m^2-x^2)(x^2-n^2)} + (m-x)(x-n)}{(m+x)(x+n) - 2\sqrt{(m^2-x^2)(x^2-n^2)} + (m-x)(x-n)} \\
&= \frac{2(m+n)x + 2\sqrt{(m^2-x^2)(x^2-n^2)}}{2(m+n)x - 2\sqrt{(m^2-x^2)(x^2-n^2)}} \\
&= \frac{(m+n)\sqrt{mn} + \sqrt{mn}(m-n)}{(m+n)\sqrt{mn} - \sqrt{mn}(m-n)} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}.
\end{aligned}
$$

113. (2) Oblast definisanosti (dopustivih vrednosti) date jednačine je određena istovremenim važenjem uslova

$$1 - 2x^2 > 0, \quad 1 - 2x^2 \neq 1, \quad x > 0,$$

što daje $0 < x < \sqrt{2}/2$. U tom domenu važi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= \frac{1}{4}\log_{1-x^2}(1-2x^2), \\
\frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4} &= \frac{3}{4}\log_{1-2x^2} 2,
\end{aligned}
$$

tako da je polazna jednačina ekvivalentna sledećoj

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4}\log_{1-2x^2}(1-2x^2) - \frac{3}{4}\log_{1-2x^2} 2,$$

$$\begin{aligned}\log_{1-2x^2} x^4 &= \log_{1-2x^2} \frac{1-2x^2}{2^3},\\ 8x^4 &= 1-2x^2.\end{aligned}$$

Jednačina $8t^2 + 2t - 1 = 0$ ima rešenja $t_1 = -1/2$, $t_2 = 1/4$. Time je gornja jednačina četvrtog stepena ekvivalentna paru kvadratnih jednačina

$$x^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad x^2 = \frac{1}{4}.$$

Prva jednačina nema (realnih) rešenja, a druga ima rešenja $x_1 = 1/2$ i $x_2 = -1/2$. Za poslednje rešenje polazna jednačina nije definisana, tako da je $x_1 = 1/2$ jedino rešenje zadate jednačine.

II način. Slično svođenje datih logaritama na logaritme sa jednakim osnovama, npr. na prirodne logaritme, vodi do iste jednačine četvrtog stepena

$$\frac{\ln x}{\ln(1-2x^2)} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\frac{\ln 2}{\ln(1-2x^2)} = \frac{\ln(1-2x^2) - 3\ln 2}{4\ln(1-2x^2)},$$

$$\begin{aligned}4\ln x &= \ln(1-2x^2) - 3\ln 2,\\ \ln x^4 &= \ln(1-2x^2)2^{-3},\\ 8x^4 &= 1-2x^2.\end{aligned}$$

114. (3) Ako je L izraz s leve strane date jednakosti, tada

$$\begin{aligned}L &= \left(\sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}} - \sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}}\right)^2\\ &= \left(\sqrt{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}}\right)^2\\ &= \left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha-(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}\right)^2\\ &= \left(\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}\right)^2 = \frac{4\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha},\end{aligned}$$

gde je $-1 < \tan\alpha < 1$.

II način.

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}-2\\
&= \frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}+\frac{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}-2\\
&= \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-2\\
&= \frac{\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}-2\\
&= \frac{2}{\cos 2\alpha}-2\\
&= \frac{2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos 2\alpha}\\
&= \frac{4\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}.
\end{aligned}$$

115. (4) Iz date jednačine

$$\begin{aligned}
\cos^2 x-\sin^2 x-a(\cos x-\sin x) &= 0,\\
(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-a(\cos x-\sin x) &= 0,\\
(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-a) &= 0,
\end{aligned}$$

se dobija disjunkcija jednačina

$$\sin x=\cos x \quad \text{ili} \quad \sin x+\cos x=a.$$

Prva je, uz $x\neq \pm\pi/2+2l\pi$, ekvivalentna sa $\tan x=1$,

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi, \quad k\in\mathbf{Z};$$

što je i rešenje polazne jednačine. Druga jednačina postaje

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})=a,$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Ako je $a > \sqrt{2}$, onda jednačina nema rešenja. Ako je $|a| \leq \sqrt{2}$, rešenja su

$$x = \pm \arccos \frac{a\sqrt{2}}{2} + (2k + \frac{1}{4})\pi, \quad k \in \mathbf{Z};$$

što je, u slučaju da je $|a| \leq \sqrt{2}$, drugi skup rešenja polazne jednačine.

II način. $\cos x - \sin x = 0$, $\cos x - \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$, $-2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$, $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0$. Druga jednačina se može transformisati u oblik

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

tj. $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

$$x = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}a + 2k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad x = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}a + 2k\pi - \frac{\pi}{4},$$

III način. Kvadriranjem jednačine $\sin x + \cos x = a$ se dobija

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = a^2,$$

$$1 + \sin 2x = a^2, \quad \sin 2x = a^2 - 1,$$

$$x = \frac{1}{2}\arcsin(a^2 - 1) + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(a^2 - 1) + l\pi, \quad k, l \in \mathbf{Z}.$$

(Može se rešavati i jednačina $\cos x + \sqrt{1 - \cos^2 x} = a$.)

Međutim, sva dobijena rešenja ne zadovoljavaju polaznu jednačinu. U stvari, mi smo ovim rešili dve jednačine $\sin x + \cos x = \pm a$, te imamo višak "rešenja". Kao ilustraciju uzmimo jednačinu $x+1 = 2$ koja ima jedno rešenje $x = 1$, a jednačina dobijena kvadriranjem, kvadratna funkcija $y = x^2$ nije bijektivna, $(x + 1)^2 = 2^2$ ima dva rešenja $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, od kojih jedno nije i rešenje polazne jednačine. Za jednačine koje imaju ista rešenja se kaže da su ekvivalentne.

Polazna jednačina je ekvivalentna sledećoj jednačini

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

dok je kvadrirana jednačina ekvivalentna jednačini

$$\sin 2x = a^2 - 1. \tag{2}$$

Jednačine (1) i (2) nemaju ista rešenja. Za vrednost parametra $a = -1$ jednačina (1) ima rešenja

$$x = \pm\frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

tj.

$$x = (2k+1)\pi, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad k, l \in \mathbf{Z},$$

a jednačina (2) ima rešenja

$$x = \frac{k}{2}\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

tj.

$$x = 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, \quad x = \pi + 2m\pi, \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi, \quad k, l, m, n \in \mathbf{Z}.$$

Na intervalu $[0, 2\pi]$ jednačina (1) ima dva rešenja, a jednačina (2) ima četiri rešenja.

Ako uvedemo novi parametar $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $|b| \leq 1$, rešenja dobijaju nešto jednostavniji oblik

$$\begin{aligned}
R_1: &\qquad x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos b + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},\\
R_2: &\qquad x = \frac{1}{2}\arcsin(2b^2 - 1) + k\pi,\\
&\qquad x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(2b^2 - 1) + l\pi, \quad k, l \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Ako se zameni neka konkretna vrednost za parametar, npr. $b = \sqrt{2}/2$, $2b^2 - 1 = 0$, dobija se

$$\begin{aligned}
R_1: &\qquad x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},\\
R_2: &\qquad x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad k, l \in \mathbf{Z},
\end{aligned}$$

tako da možemo pretpostaviti da su koincidentna rešenja iz R_1 ona sa znakom "$-$", sa prvim rešenjima iz R_2. Dakle, uz $k = 0$, treba dokazati jednakost

$$-\arccos b + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\arcsin(2b^2 - 1). \tag{3}$$

Najpre izvedimo nekoliko formula za inverzne trigonometrijske funkcije

$$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha,\quad \sin(\arcsin A)=A,\quad \alpha\in[-\pi,\pi],\quad A\in[-1,1].$$

Neka je

$$\sin\alpha = A,\quad \alpha=\arcsin A.$$

Iz $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ sledi

$$\arcsin A+\arccos A=\frac{\pi}{2}.$$

Takođe,

$$\cos\arcsin A=\pm\sqrt{1-(\sin\arcsin A)^2}=\pm\sqrt{1-A^2}.$$

Iz $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ se dobija

$$\begin{aligned}
2\alpha &= \arcsin(2A\cos\alpha)\\
2\arcsin A &= \arcsin(2A\sqrt{1-A^2}).
\end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned}
\arcsin A\pm\arcsin B &= \arcsin[\sin(\arcsin A\pm\arcsin B)]\\
&= \arcsin[A\cdot\cos\arcsin B\pm B\cdot\cos\arcsin A]\\
&= \arcsin[A\sqrt{1-B^2}\pm B\sqrt{1-A^2}).
\end{aligned}$$

Sada jednakost (3) postaje

$$\begin{aligned}
\arccos b-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arcsin(2b^2-1) &= 0,\\
2\arcsin b-\frac{\pi}{2}-\arcsin(2b^2-1) &= 0,\\
\arcsin(2b\sqrt{1-b^2})-\arcsin(2b^2-1) &= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(2b\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-(2b^2-1)^2}-(2b^2-1)\sqrt{1-4b^2(1-b^2)}\right) &= \frac{\pi}{2},\\
\arcsin\left(2b\sqrt{1-b^2}\sqrt{4b^2-4b^4}-(2b^2-1)\sqrt{(1-2b^2)^2}\right) &= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ako je $|1-2b^2| = 1-2b^2$, konačno se dobija identitet

$$\begin{aligned}\arcsin\left(4b^2(1-b^2)+(1-2b^2)^2\right) &= \arcsin(4b^2-4b^4+1-4b^2+4b^4)\\ &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

116. (5) v. sliku

Označimo sa N presek prave AM i stranice BC. Neka je h visina trougla ΔABN na stranicu AB, i neka je H visina trapeza $\square ABCD$. Površina trapeza je

$$\frac{8+4}{2}\cdot H = 6H,$$

a površina trougla ΔABN je jednaka $\frac{1}{2}\cdot 8h = 4h$. Prema uslovu zadatka, površina trougla je 4 puta manja od površine trapeza, tj. $6H = 16h$, odnosno, $\frac{H}{h} = \frac{8}{3}$. Trouglovi ΔANB i ΔMNC su slični jer imaju jednake unakrsne i naizmenične uglove. Iz njihove sličnosti sledi

$$\frac{AB}{h} = \frac{CM}{H-h},$$

$$CM = AB\cdot\frac{H-h}{h} = 8\left(\frac{H}{h}-1\right) = \frac{40}{3}.$$

1997. septembar

117. (1) Neka je $x = \sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$, tada je

$$\begin{aligned}x^2 &= a+\sqrt{b}+2\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{b} = 4\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},\\ x &= 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

slično,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

Zbir, odnosno razlika poslednje dve jednakosti daje traženi identitet.

II način. Kvadriranjem zadatih identiteta se dobija ekvivalentan očigledan identitet

$$\begin{aligned} a\pm\sqrt{b} &= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} \\ &= \frac{2a}{2}\pm\sqrt{b}. \end{aligned}$$

II_1 način.

$$\begin{aligned} \sqrt{a\pm\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\frac{\sqrt{a^2-(a^2-b)}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \end{aligned}$$

118. (2)

$$\begin{aligned} \log y^x &= \log 8 \\ \log y^{(x+1)/(x-1)} &= \log 4, \end{aligned}$$

tj.

$$y^x = 8, \quad y^{(x+1)/(x-1)} = 4.$$

Sada je

$$y^{(x+1)/(x-1)} = (y^x)^{\frac{x+1}{x(x-1)}} = 8^{\frac{x+1}{x(x-1)}} = 2^{\frac{3x+3}{x(x-1)}},$$

tako da je

$$2^{\frac{3x+3}{x(x-1)}} = 2^2,$$

$$\frac{3x+3}{x(x-1)} = 2, \quad 3x+3 = 2x^2 - 2x, \quad 2x^2 - 5x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 3,$$

$$y^{-1/2} = 2^3 = (2^{-6})^{-1/2}, \quad y_1 = 2^{-6} = 1/64,$$

$$y^3 = 2^3, \quad y_2 = 2.$$

II način. Najpre je

$$\begin{aligned} \frac{\log y}{\log 2} &= \frac{3}{x} \\ \frac{\log y}{\log 2} &= 2 \cdot \frac{x-1}{x+1}, \end{aligned}$$

tako da je

$$\frac{3}{x} = 2\frac{x-1}{x+1}, \quad 2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Varijanta ovog rešenja je da se mogao izračunati $\log y$ iz obe jednačine, i zatim izjednačiti desne strane jednačina. ̌icme se eliminiše nepoznata y.

III način. Sistem jednačina $y^x = 2^3$, $y^{(x+1)/(x-1)} = 4$ rešava se smenom promenljive iz prve jednačine $y = 2^{3/x}$ u drugu jednačinu

$$2^{\frac{3}{x}\frac{x+1}{x-1}} = 2^2.$$

119. (3)

$$\begin{aligned} \sin 20^o \sin 40^o \sin 80^o &= \frac{1}{2}(\cos 20^o - \cos 60^o) \sin 80^o \\ &= \frac{1}{2}(\cos 20^o \sin 80^o - \cos 60^o \sin 80^o) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sin 100^o + \sin 60^o) - \frac{1}{2}(\sin 140^o + \sin 20^o)\right] \\
&= \frac{1}{4}(\sin 100^o + \sin 60^o - \sin 140^o - \sin 20^o) \\
&= \frac{1}{4}(\sin 80^o - \sin 40^o - \sin 20^o + \frac{\sqrt{3}}{2}) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4}(\sin 80^o - \sin 40^o - \sin 20^o).
\end{aligned}$$

Dakle, data jednakost je ekvivalentna sledećoj

$$\begin{aligned}
\sin 20^o + \sin 40^o &= \sin 80^o, \\
\sin 80^o - \sin 40^o &= \sin 20^o, \\
2\cos 60^o \ \sin 20^o &= \sin 20^o, \\
2 \cdot \frac{1}{2} \sin 20^o &= \sin 20^o,
\end{aligned}$$

što je identitet.

120. (4) v. sliku

Neka je P površina i $P(BLQ) = x$. Tada je $P(LCQ) = 2x$ i $x = 1/3$. Slično, ako je $P(AKQ) = y$, onda je $P(KBQ) = 2y$. Ako je $P(AQC) = z$, tada

$$2(z+y) = 3x + 2y, \quad 2z = 3x, \quad z = 3x/2,$$

i

$$z + 2x = 2(x + 3y), \quad z = 6y, \quad y = \frac{z}{6} = \frac{x}{4}.$$

Dakle,

$$P(ABC) \ = \ 3x + 3y + z = 3x + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x$$

$$= \quad \frac{12x+3x+6x}{4} = \frac{21x}{4} = \frac{7}{4}.$$

II način. Posmatrajmo pravu LM kroz tačku L paralelnu pravoj CK. Iz sličnosti trouglova ΔMBL i ΔKBC sledi

$$\frac{BM}{BK} = \frac{BL}{BC} = \frac{1}{3}, \quad BM = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}AB = \frac{2}{9}AB,$$

$$AM = \frac{7}{9}AB.$$

Iz sličnosti trouglova ΔAKQ i ΔAML nalazimo

$$\frac{AQ}{AL} = \frac{AK}{AM} = \frac{\frac{1}{3}AB}{\frac{7}{9}AB} = \frac{3}{7}, \quad QL = \frac{4}{7}AL.$$

Sem toga,

$$\begin{aligned}
P(BQC) &= P(BQL) + P(QLC) \\
&= \frac{1}{2}BL\cdot QL\sin\angle BQL + \frac{1}{2}LC\cdot QL\sin\angle QLC \\
&= \frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}BL\cdot AL\sin\angle BLQ + \frac{1}{2}LC\cdot AL\sin\angle QLC\right) \\
&= \frac{4}{7}(P(ABL)+P(ALC)) = \frac{4}{3}P(ABC),
\end{aligned}$$

stoga je

$$P(ABC) = \frac{7}{4}P(BQC) = \frac{7}{4}.$$

III način. Koristimo poznato tvrđenje: ako je $AK : KB = m : n$, tada je

$$\vec{CK} = \frac{n}{m+n}\vec{CA} + \frac{m}{m+n}\vec{CB}.$$

U našem slučaju je: $\vec{AL} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$, pa je

$$\vec{AQ} = \mu\vec{AL} = \frac{2\mu}{3}\vec{AB} + \frac{\mu}{3}\vec{AC} = \frac{2\mu}{3}\cdot 3\vec{AK} + \frac{\mu}{3}\vec{AC} = 2\mu\vec{AK} + \frac{\mu}{3}\vec{AC}.$$

S druge strane je $\vec{AQ} = \lambda\vec{AC} + (1-\lambda)\vec{AK}$. Dakle, $\lambda = \frac{\mu}{3}$ i $1-\lambda = 2\mu$, odakle se nalazi $\mu = \frac{3}{7}$. Iz $AQ = \frac{3}{7}AL$ dobijamo $\frac{AL}{QL} = \frac{7}{4}$. Trouglovi ABC i

BCQ imaju zajedničku osnovicu BC, pa je odnos njihovih površina jednak odnosu visina h_A i h_Q iz temena A i Q na osnovicu BC. Dakle,

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta BCQ}} = \frac{h_A}{h_Q} = \frac{AL}{QL} = \frac{7}{4}.$$

121. (5) U dokazu ćemo koristiti sledeći kombinatorni princip: Broj nezavisnih mogućnosti se množi. Neparnih cifara (brojki) ima pet: 1, 3, 5, 7, 9; a isto toliko i parnih 0, 2, 4, 6, 8. Neka je $abcdef$ neki broj, gde su a, b, c, d, e, f neke od brojki $0, 1, 2, \ldots, 9$. Na mestu cifre a može stajati bilo koja od pet neparnih cifri $1, 3, 5, 7, 9$, a mestu b može stajati bilo koja od preostale četiri neparne cifre, i na mestu c – bilo koja od preostale tri. Takvih kombinacija ima $5 \cdot 4 \cdot 3$. Na mestima d, e, f može stajati bilo koja od pet parnih brojki $0, 2, 4, 6, 8$, tako da je broj mogućnosti $5 \cdot 5 \cdot 5$. Brojeva kojima je prva trojka sastavljena od neparnih i različitih brojki, a druga trojka od parnih ima $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 7500$. Među tim brojevima ima onih kojima je na trećem mestu 7, a na četvrtom 8. Sličnim zaključivanjem se dobija da takvih brojeva ima $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300$. Dakle, srećnih karata ima $7500 - 300 = 7200$.

1998. jun

122. (1) Transformišimo levu stranu date jednakosti

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} \\
&= \sqrt{\sqrt[3]{x^4}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)} + \sqrt{\sqrt[3]{y^4}\left(\sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{x^2}\right)} \\
&= \sqrt{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right) \\
&= \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^{3/2} = a,
\end{aligned}$$

tako da je $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

II način. Kvadriranjem obeju strana jednakosti se dobija

$$\begin{aligned}
x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2} + 2\sqrt{(x^2 + x^{4/3}y^{2/3})(y^2 + x^{2/3}y^{4/3})} + y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4} &= a^2 \\
x^2 + x^{4/3}y^{2/3} + 2\sqrt{(x^{8/3}y^{4/3} + 2x^2y^2 + x^{4/3}y^{8/3})} + x^{2/3}y^{4/3} + y^2 &= a^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + x^{4/3}y^{2/3} + 2\sqrt{(x^{4/3}y^{2/3} + x^{2/3}y^{4/3})^2} + x^{2/3}y^{4/3} + y^2 &= a^2\\
x^2 + 3x^{4/3}y^{2/3} + 3x^{2/3}y^{4/3} + y^2 &= a^2\\
\left(x^{2/3} + y^{2/3}\right)^2 &= a^2.
\end{aligned}$$

123. (2) Prvi sistem nejednačina

$$0 < \frac{x+4}{2} < 1, \quad \log_2 \frac{2x-1}{3+x} > 0, \quad \frac{2x-1}{3+x} > 0, \quad \log_2 \frac{2x-1}{3+x} > 1;$$

odnosno

$$0 < x+4 < 2, \quad \frac{2x-1}{3+x} > 1, \quad 2(x-\frac{1}{2})(x+3) > 0, \quad \frac{2x-1}{3+x} > 2;$$

ili, ekvivalentno,

$$-4 < x < -2, \quad (x-\frac{1}{2})(x+3) > 0, \quad \frac{2x-1-2x-6}{3+x} > 0;$$

$$-4 < x < -2, \quad x+3 < 0, \quad x-\frac{1}{2} < 0;$$

daje $x \in]-4, -3[$. Slično se rešava drugi sistem nejednačina

$$\frac{x+4}{2} > 1, \quad \log_2 \frac{2x-1}{3+x} > 0, \quad \frac{2x-1}{3+x} > 0, \quad \log_2 \frac{2x-1}{3+x} < 1;$$

tj.

$$x > -2, \quad \frac{2x-1}{x+3} > 1, \quad 2(x-\frac{1}{2})(x+3) > 0, \quad \frac{2x-1}{3+x} < 2;$$

ili

$$x > -2, \quad \frac{2x-1-x-3}{x+3} > 0, \quad (x-\frac{1}{2})(x+3) > 0, \quad \frac{2x-1-2x-6}{3+x} < 0;$$

$$x > -2, \quad \frac{x-4}{x+3} > 0, \quad (x-\frac{1}{2})(x+3) > 0, \quad 3+x > 0;$$

$$x > -2, \quad x > 4, \quad x > \frac{1}{2}, \quad x > -3;$$

odnosno $x \in]4, +\infty[$. Rešenje je $]-4, -3[\cup]4, +\infty[$.

124. (3) Ako se uvede smena $\sqrt{x/y}=t$ prva jednačina postaje

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2},\quad 2t^2-5t+2=0,\quad t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4},$$

$t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$. Prvo rešenje daje $\frac{x}{y}=\frac{1}{4}$, $y=4x$, a kako je $x+y=5$, dobija se $(x,y)=(1,4)$. Drugo rešenje daje $\frac{x}{y}=4$, $(x,y)=(4,1)$. Rešenja su $\{\,(1,4),(4,1)\,\}$.

II način. Kvadriranjem leve i desne strane prve jednačine se dobija

$$\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}=\frac{25}{4},\quad \frac{x^2+y^2}{xy}+2=\frac{25}{4},\quad \frac{(x+y)^2-2xy}{xy}+2=\frac{25}{4},$$

gde se iskoristi druga jednačina

$$\frac{25}{xy}=\frac{25}{4},\quad xy=4.$$

Dakle, dobijen je sistem jednačina $x+y=5$, $xy=4$.

II$_a$ način. Smena $y=5-x$ u jedan od oblika prve jednačine daje jednu kvadratnu jednačinu sa jednom promenljivom $x^2-5x+4=0$.

125. (4)

$$\begin{aligned}\tan 3\alpha &= \tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha}\\ &= \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}\\ &= \frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\\ &= \tan\alpha\frac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.\end{aligned}$$

II način. U većim tablicama se nalazi formula

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.$$

III način.

$$L = \frac{\sin(2\alpha+\alpha)\cos\alpha}{\cos(2\alpha+\alpha)\sin\alpha}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha)\cos\alpha}{(\cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha)\sin\alpha} \\
&= \frac{2\sin\alpha\cos^3\alpha + \sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha - 2\sin^3\alpha\cos\alpha} \\
&= \frac{3\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos^3\alpha - 3\sin^3\alpha\cos\alpha} \\
&= \frac{3-\tan^2\alpha}{1-3\tan^2\alpha}.
\end{aligned}
$$

126. (5) v. sliku

Dovoljno je dokazati da je površina paralelograma koji se dobija spajanjem sredina susednih stranica konveksnog četvorougla jednaka polovini površine datog četvorougla. Neka su $\square ABCD$ i $\square A_1B_1C_1D_1$ dati četvorouglovi i koincidentne sredine odgovarajućih stranica $P = AB \cap A_1B_1$, $Q = BC \cap B_1C_1$, $R = CD \cap C_1D_1$, $S = DA \cap D_1A_1$. Četvorougao $\square PQRS$ je paralelogram jer su njegove stranice PQ i RS srednje linije trouglova ΔABC i ΔCDA redom, pa su paralelne sa dijagonalom AC i dva puta kraće od nje. Neka je $P(\cdot)$ oznaka za površinu. Slična dva puta manja figura ima četiri puta manju površinu tako da je

$$P(\Delta PQB) + P(\Delta RSD) = \frac{1}{4}P(\Delta ABC) + \frac{1}{4}P(\Delta CAD) = \frac{1}{4}P(\square ABCD).$$

Slično je

$$P(\Delta QRC) + P(\Delta SPA) = \frac{1}{2}P(\square ABCD),$$

$$
\begin{aligned}
P(\square PQRS) &= P(\square ABCD) - P(\Delta APS) - P(\Delta BQP) \\
&\quad - P(\Delta CRQ) - P(\Delta DSR)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= P(\square ABCD) - \frac{1}{4}P(\square ABCD) - \frac{1}{4}P(\square ABCD) \\ &= \frac{1}{2}P(\square ABCD). \end{aligned}$$

Dakle

$$P(\square ABCD) = \frac{1}{2}P(\square PQRS) = P(\square A_1B_1C_1D_1).$$

II način. Kako je dijagonala AC paralelna i dva puta duža od srednjih linija PQ i RS u odgovarajućim trouglovima, a isto važi i za dijagonalu A_1C_1, to je AC paralelna i jednake dužine sa A_1C_1, tj. $AC\#A_1C_1$. Takođe, $BD\#B_1D_1$. Važi osobina: Ako dva četvorougla imaju paralelne i jednakih dužina dijagonale, onda oni imaju jednake površine. Naime, ako su d_1 i d_2 dijagonale četvorougla i φ ugao između njih, onda je površina četvorougla

$$P = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

Ova formula se brzo dobija iz formula za površinu dva trougla na koje dijagonala deli četvorougao.

1998. septembar

127. (1) Ako je L izraz sa leve strane

$$\begin{aligned} L &= \frac{(b-1)(b-2)-(b-1)\sqrt{(b-2)(b+2)}}{(b+1)(b+2)-(b+1)\sqrt{(b-2)(b+2)}}\sqrt{\frac{b+2}{b-2}} \\ &= \frac{b-1}{b+1}\cdot\frac{b-2-\sqrt{(b-2)(b+2)}}{b+2-\sqrt{(b-2)(b+2)}}\frac{\sqrt{b+2}}{\sqrt{b-2}} \\ &= \frac{b-1}{b+1}\cdot\frac{\sqrt{b-2}-\sqrt{b+2}}{\sqrt{b+2}-\sqrt{b-2}} \\ &= \frac{1-b}{1+b}. \end{aligned}$$

128. (2) Data bikvadratna jednačina ima rešenja

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\tfrac{2a-1\pm\sqrt{1-4a+4a^2-4a^2+4}}{2}} \\ &= \pm\sqrt{a-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}-a}}. \end{aligned}$$

a) Jednačina nema rešenja ako je $5/4 < a$, tj. $a \in]5/4, +\infty[$, ili $a \leq 5/4$ ali $a - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - a} < 0$, tj. $\sqrt{\frac{5}{4} - a} < \frac{1}{2} - a$. Ova jednakost važi samo ako je $a < 1/2$, kvadriranje leve i desne strane daje $a^2 > 1$, $|a| > 1$. Uzimajući u obzir da je $a < 1/2$ dobija se $a \in] - \infty, -1[$. Dakle, jednačina nema realnih rešenja ako je $a \in] - \infty, -1[\cup]5/4, +\infty[$.

b) Kako je $x = \pm\sqrt{\cdot}$, jednačina ima samo jedno rešenje $x = 0$ ako je $a - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - a} = 0$, tj. $\sqrt{\frac{5}{4} - a} = \frac{1}{2} - a$. Ova jednakost ima smisla samo ako je $a < 1/2$. Kvadriranjem leve i desne strane, posle transformacija se dobija $a^2 = 1$, $a = \pm 1$. Dakle $a = 1$. Ako je $x = 0$ rešenje dobijeno iz $a - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} - a} = 0$, slično kao gore sledi $a = 1$, ali tada jednačina ima i drugih realnih rešenja koja se dobijaju iz $a - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - a} = 1$. Jednačina ima tačno jedno realno rešenje za $a = -1$.

c) Ako je

$$a - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - 1} > 0 \quad \text{i} \quad a - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} - 1} < 0, \quad \text{ili} \quad a = \frac{5}{4},$$

jednačina ima dva rešenja. Gornje dve nejednakosti daju

$$\frac{1}{2} - a < \sqrt{\frac{5}{4} - a}, \quad a - \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5}{4} - a}.$$

Druga od nejednakosti važi za sve $a \leq 1/2$, kao i za $a > 1/2$ ako je $a^2 < 1$, $1/2 < a < 1$. Dakle, druga nejednakost važi za sve $a \in] - \infty, 1[$. Prva nejednakost važi za sve $5/4 \geq a \geq 1/2$, kao i za $a < 1/2$ ako je $a^2 < 1$, $-1 < a < 1/2$. Dakle, prva nejednaksot važi za sve $a \in] - 1, 5/4[$. Jednačina ima tačno dva realna rešenja ako važe obe nejednakosti, tj. $a \in] - 1, 1[$ ili ako je $a = 5/4$.

d) Jednačina ima tri rešenja ako je

$$a - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - 1} > 0 \quad \text{i} \quad a - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4} - a} = 0.$$

Prvi od uslova važi za $a \in] - 1, 5/4[$, videti c). Drugi uslov je ekvivalentan $a - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4} - a}$, odakle mora biti $a \geq \frac{1}{2}$. Kvadriranjem leve i desne strane ove jednakosti se dobija $a^2 = 1$, $|a| = 1$, a kako je $a \geq 1/2$ dobija se $a = 1$. Ova vrednost zadovoljava i prvi od uslova. Jednačina ima tri realna rešenja ako je $a = 1$.

e) Ako je $a \in]1, 5/4[$ onda jednačina ima četiri realna rešenja.
129. (3) Uvođenjem smena $u = x\sqrt{y}$, $v = y\sqrt{x}$ sistem postaje

$$u + v = 6, \quad u^2 + v^2 = 20.$$

Kvadriranjem leve i desne strane prve jednačine, uz korišćenje druge daje

$$u^2 + 2uv + v^2 = 36, \quad 20 + 2uv = 36, \quad uv = 8.$$

Time je $uv = x^{3/2}y^{3/2} = 8$, $x^{1/2}y^{1/2} = 2$, $xy = 4$. Druga jednačina zadatog sistema daje $4x + 4y = 20$, $x + y = 5$, $y = 5 - x$. Konačno

$$x(5 - x) = 4, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

Rešenja su $(x, y) \in \{\,(1, 4), (4, 1)\,\}$.
130. (4) Ako je I dati izraz, tada je

$$I = \frac{2\sin(n+2)\alpha\cos 2\alpha + \sin(n+2)\alpha}{2\cos(n+2)\alpha\cos 2\alpha + \cos(n+2)\alpha} = \tan(n+2)\alpha.$$

131. v. sliku

(5) Neka su a i b dužine kateta pravouglog trougla ΔABC, c dužina hipotenuze, a r i R poluprečnici upisane i opisane kružnice. Sredina S hipotenuze AB je centar opisane kružnice, jer je ugao nad prečnikom kruga prav, tako da je $2R = c$. Neka je O centar upisane kružnice i neka su A_1, B_1 i C_1 tačke dodira upisane kružnice i stranica BC, CA i AB redom. Koristeći osobinu jednakosti dužina tangentnih linija na kružnicu, ako su te linije povučene iz iste tačke, dobija se

$$\begin{aligned} AC_1 &= AB_1 = AC - CB_1 = b - r \\ BC_1 &= BA_1 = BC - CA_1 = a - r \\ c &= AC_1 + C_1B = a + b - 2r \end{aligned}$$

tako da je $2r = a + b - c$. Time je $2R + 2r = c + a + b - c = a + b$.

2000. jun

132. (1) Svi koreni u datom izrazu I, pod uslovima zadatka, su definisani. Nejednakost $m - x \geq 0$ se ekvivalentnim transformacijama svodi na osnovnu nejednakost

$$m \geq x, \quad m \geq \frac{2mn}{n^2+1}, \quad n^2 + 1 \geq 2n, \quad (n-1)^2 \geq 0.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}} \cdot \frac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}} \\
&= \frac{m+x+2\sqrt{(m+x)(m-x)}+m-x}{m+x-m+x} \\
&= \frac{2m+2\sqrt{m^2-x^2}}{2x} \\
&= \frac{m+\sqrt{m^2-x^2}}{x} \\
&= \frac{m+\sqrt{m^2-\frac{4m^2n^2}{(n^2+1)^2}}}{\frac{2mn}{n^2+1}} \\
&= \frac{m(n^2+1)+m\sqrt{(n^2+1)^2-4n^2}}{2mn} \\
&= \frac{n^2+1+\sqrt{n^4+2n^2+1-4n^2}}{2n} \\
&= \frac{n^2+1+\sqrt{(n^2-1)^2}}{2n} \\
&= \frac{n^2+1+|n^2-1|}{2n} \\
&= \frac{n^2+1+1-n^2}{2n} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

II način.

$$\begin{aligned}
I^2 &= \frac{m+x+2\sqrt{m^2-x^2}+m-x}{m+x-2\sqrt{m^2-x^2}+m-x}\\
&= \frac{m+\sqrt{m^2-\frac{4m^2n^2}{(n^2+1)^2}}}{m-\sqrt{m^2-\frac{4m^2n^2}{(n^2+1)^2}}}\\
&= \frac{m+\frac{m}{n^2+1}\sqrt{(n^2+1)^2-4n^2}}{m-\frac{m}{n^2+1}\sqrt{(n^2+1)^2-4n^2}}\\
&= \frac{n^2+1+\sqrt{(n^2-1)^2}}{n^2+1-\sqrt{(n^2-1)^2}}\\
&= \frac{n^2+1+|n^2-1|}{n^2+1-|n^2-1|}\\
&= \frac{n^2+1+1-n^2}{n^2+1-1+n^2}\\
&= \frac{1}{n^2}, \qquad I=\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

III način.

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}\\
&= \sqrt{m+\frac{2mn}{n^2+1}}+\sqrt{m-\frac{2mn}{n^2+1}}\\
&= \sqrt{\frac{m(n^2+2n+1)}{n^2+1}}+\sqrt{\frac{m(n^2-2n+1)}{n^2+1}}\\
&= (n+1)\sqrt{\frac{m}{n^2+1}}+(1-n)\sqrt{\frac{m}{n^2+1}}\\
&= 2\sqrt{\frac{m}{n^2+1}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}\\
&= 2n\sqrt{\frac{m}{n^2+1}}, \qquad \frac{A}{B}=\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

133. (2) Kako je $1 + \log 8 = \log 10 + \log 8 = \log 80$ imamo

$$\begin{aligned} \log(x^2 + y^2) &= \log 80 \\ \log \frac{x+y}{x-y} &= \log 3 \end{aligned}$$

tj.

$$x^2 + y^2 = 80, \qquad \frac{x+y}{x-y} = 3.$$

Iz druge jednačine se dobija $x + y = 3x - 3y$, $x = 2y$. Smena u prvu jednačinu daje $4y^2 + y^2 = 80$, $y^2 = 16$, $y_1 = -4$, $y_2 = 4$. Dalje je $x_1 = -8$, $x_2 = 8$. Negativna rešenja ne zadovoljavaju polaznu jednačinu jer se dobija $\log(x + y) = \log(-8 - 4) = \log(-12)$ logaritam negativnog broja. Rešenje sistema jednačina je $(x, y) = (8, 4)$.

134. (3) Ako se iskoristi formula

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

dati izraz I postaje

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{4\cos^4 x - 6(2\cos^2 x - 1) + 3} + \sqrt{4\sin^4 x + 6(1 - 2\sin^2 x) + 3} \\ &= \sqrt{4\cos^4 x - 12\cos^2 x + 9} + \sqrt{4\sin^4 x - 12\sin^2 x + 9} \\ &= \sqrt{(2\cos^2 x - 3)^2} + \sqrt{(2\sin^2 x - 3)^2} \\ &= |2\cos^2 x - 3| + |2\sin^2 x - 3| \\ &= 3 - 2\cos^2 x + 3 - 2\sin^2 x \\ &= 6 - 2(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= 4. \end{aligned}$$

II način. Svođenje na kosinus dvostrukog ugla daje

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{(2\cos^2 x)^2 - 6\cos 2x + 3} + \sqrt{(2\sin^2 x)^2 + 6\cos 2x + 3} \\ &= \sqrt{(1 + \cos 2x)^2 - 6\cos 2x + 3} + \sqrt{(1 - \cos 2x)^2 + 6\cos 2x + 3} \\ &= \sqrt{4 - 4\cos 2x + \cos^2 2x} + \sqrt{4 + 4\cos 2x + \cos^2 2x} \\ &= \sqrt{(2 - \cos 2x)^2} + \sqrt{(2 + \cos 2x)^2} \\ &= |2 - \cos 2x| + |2 + \cos 2x| \\ &= 2 - \cos 2x + 2 + \cos 2x \\ &= 4. \end{aligned}$$

III način.

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{4\cos^2 x(1-\sin^2 x) - 6(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3} \\ &\quad + \sqrt{4\cos^2 x(1-\sin^2 x) + 6(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3} \\ &= \sqrt{3(2\sin^2 x + 1) - 2\cos^2 x(2\sin^2 x + 1)} \\ &\quad + \sqrt{3(2\cos^2 x + 1) - 2\sin^2 x(2\cos^2 x + 1)} \\ &= \sqrt{(3 - 2\cos^2 x)(2\sin^2 x + 1)} + \sqrt{(3 - 2\sin^2 x)(2\cos^2 x + 1)} \\ &= \sqrt{(3 - 2\cos^2 x)^2} + \sqrt{(3 - 2\sin^2 x)^2} \\ &= 4. \end{aligned}$$

IV način. Kvadriranje datog izraza vodi rešenju dužim putem.

135. (4) Jednačina nema rešenja zato što važi sledeća dvostruka nejednakost

$$\frac{1}{4} \le \sin^6 x + \cos^6 x \le 1.$$

Druga nejednakost (irelevantna za ovaj zadatak ali se navodi radi potpunosti nejednakosti) se dokazuje direktno

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \\ &\le \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Prva nejednakost se dobija tako što se odredi minimum kvadratne funkcije

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x = 3\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 3t^2 - 3t + 1.$$

Najmanja vrednost $y_{\min}$ se dostiže za

$$t_T = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x = \pm\frac{\pi}{4}$$

i iznosi $y_{\min} = y(x_T) = y(\frac{1}{2}) = 3\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4}$.

II način. Formula za zbir kubova daje

$$\begin{aligned}
(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x) &= \frac{1}{8}\\
\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x &= \frac{1}{8}\\
(1-\cos^2 x)^2-(1-\cos^2 x)\cos^2 x+\cos^4 x &= \frac{1}{8}\\
1-2\cos^2 x+\cos^4 x-\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x &= \frac{1}{8}\\
3\cos^4 x-3\cos^2 x+\frac{7}{8} &= 0.
\end{aligned}$$

Smena $t=\cos^2 x$ daje kvadratnu jednačinu

$$3t^2-3t+\frac{7}{8}=0,$$

čija rešenja su par konjugovano–kompleksnih brojeva

$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 3\cdot\frac{7}{8}}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{-\frac{3}{2}}}{6}.$$

Međutim, $\cos^2 x$ je uvek (nenegativan) realan broj tako da zadata jednačina nema rešenja.

Do iste bikvadratne jednačine po $\cos x$ se dolazi i primenom **opšteg principa o smanjivanju broja funkcija** već u početnoj formuli, i prelaskom na jednačinu po kosinisima

$$(1-\cos^2 x)^3+\cos^6 x=\frac{1}{8}.$$

III način. Dopuna do kuba binoma daje

$$\begin{aligned}
\sin^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x &\\
+\cos^6 x-3\sin^4 x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos^4 x &= \frac{1}{8}\\
(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x) &= \frac{1}{8}\\
1-3\sin^2 x\cos^2 x &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8-24\sin^2 x\cos^2 x &= 1\\ 4\sin^2 2x &= \frac{7}{6}\\ \sin^2 2x &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Poslednja jednačina nema rešenja zato što je $|\sin 2x| \leq 1$ i $\sin^2 2x \leq 1$. Ako se gore u petoj jednačini iskoriste formule $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ i $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, sa nešto više računa se dobija jednačina po $\cos 2x$.

IV način. Postupno snižavanje reda jednačine.

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^4 x(1-\sin^2 x) &= \frac{1}{8}\\ \sin^6 x + \cos^4 x - \cos^4 x\sin^2 x &= \frac{1}{8}\\ \sin^2 x(\sin^4 x - \cos^4 x) + \cos^4 x &= \frac{1}{8}\\ \sin^2 x(\sin^2 x - \cos^2 x) + \cos^2 x(1-\sin^2 x) &= \frac{1}{8}\\ \sin^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^2 x &= \frac{1}{8}\\ \sin^2 x(1-\cos^2 x) - 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^2 x &= \frac{1}{8}\\ \sin^2 x - 3\sin^2 x\cos^2 x + \cos^2 x &= \frac{1}{8}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

136. (5) Primetimo da definisana operacija ima svojstvo da ako je $k = a^2+b^2+c^2$, tada je

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 + c^2 = a^2+b^2+c^2 = k,$$

ciklično važi i za preostale dve trojke. Dakle, zbir kvadrata komponenata ostaje nepromenjen prilikom primene gornje operacije. Drugačije rečeno, k je invarijanta date operacije. Kako je

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \neq 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2$$

to se iz trojke $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ ne može dobiti trojka $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$.

II način. Dovoljno je ispisati tri trojke iz definicije

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$\left(\frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{2-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}-\frac{1}{2}\right),$$
$$\left(2, \frac{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) = \left(2, 1+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}\right),$$

pa videti da se sve tri slike razlikuju od trojke koja je ponuđena kao rezultat operacije.

Ovaj direktni pristup od originala ka slikama se može zameniti dužim indirektnim pristupom u kome se polazi od slike i traži original. Naime, trebalo bi rešiti tri sistema linearnih jednačina

$$\begin{array}{llll} \frac{a+b}{\sqrt{2}} & = \sqrt{2}, & \frac{a-b}{\sqrt{2}} & = 1; \\ \frac{a+b}{\sqrt{2}} & = 1+\sqrt{2}, & \frac{a-b}{\sqrt{2}} & = \sqrt{2}; \\ \frac{a+b}{\sqrt{2}} & = 1+\sqrt{2}, & \frac{a-b}{\sqrt{2}} & = 1. \end{array}$$

III način. Pitanje implicitno podrazumeva da se trojke

$$\left\{2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \quad \rightarrow \quad \left\{1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}$$

mogu permutovati. Preciznije pitanje glasi: Da li se od neke od trojki

$$\begin{array}{lll} \left(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & \left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), & \left(\sqrt{2}, 2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right), & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2, \sqrt{2}\right), & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, 2\right) \end{array}$$

primenom date operacije može dobiti neka od trojki

$$\begin{array}{lll} \left(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right), & \left(1, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), & \left(\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}\right), \\ \left(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 1\right), & \left(1+\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\right), & \left(1+\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right). \end{array}$$

Zadatak je lakše rešiti zanemarujući poredak komponenata. Data operacija čuva nepromenjenom jednu od komponenata, ako se uporede trojka $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

sa trojkom $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$ očigledno se ponavlja samo $\sqrt{2}$. Dakle, od para $2, \frac{1}{\sqrt{2}}$ treba da se dobije par $1, 1+\sqrt{2}$

$$\{x, y\} = \left\{2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \quad \left\{\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{1, 1+\sqrt{2}\right\}.$$

Kako je $1 > 0$ i $1+\sqrt{2} > 0$, to mora biti $x > y$ i stoga $x = 2$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sem toga iz $\frac{x+y}{\sqrt{2}} > \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ i $1+\sqrt{2} > 1$ sledi

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}, \quad \frac{x-y}{\sqrt{2}} = 1,$$

što je netačno

$$\begin{aligned}
\frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} &= \frac{2\sqrt{2}+1}{2} = \sqrt{2}+\frac{1}{2} \quad \neq \quad 1+\sqrt{2}, \\
\frac{2-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} &= \frac{2\sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2}-\frac{1}{2} \quad \neq \quad 1.
\end{aligned}$$

2000. septembar

137. (1) Ako je I dati izraz, tada, uzimajući u obzir da je $a\sqrt{a}+b\sqrt{b} = (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3$, važi

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 \\
&= (a-2\sqrt{ab}+b)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 \\
&= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(a-b)^2} \\
&= \frac{((\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}))^2}{(a-b)^2} \\
&= \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

138. (2) Dati sistem je ekvivalentan sledećem

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{4}{y} &= \log_2 (x+y)^2 \\ \log_2 (x+y)(x^2-xy+y^2) &= \log_2 2,\end{aligned}$$

tj.

$$(x+y)^2 = \frac{4}{y}, \quad x^3+y^3=2.$$

Iz prve jednačine sledi $x = -y + 2/\sqrt{y}$. Ta smena u drugu jednačinu daje

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{\sqrt{y}} - y\right)^3 + y^3 &= 2 \\ \frac{8}{y\sqrt{y}} - 3\frac{4}{y}y + 3\frac{2}{\sqrt{y}}y^2 - y^3 + y^3 &= 2 \\ \frac{4}{y\sqrt{y}} - 6 + 3y\sqrt{y} &= 1.\end{aligned}$$

Nova smena $y^{3/2} = t$ i oslobađanje od razlomka daje kvadratnu jednačinu

$$3t^2 - 7t + 4 = 0,$$

čija su rešenja $t_{1,2} = \frac{7\pm 1}{6}$, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{4}{3}$. Dakle, $y_1 = t_1^{2/3} = 1$, $x_1 = 1$, pa je rešenje $(x,y) = (1,1)$. Drugo rešenje je $y_2 = t_2^{2/3} = (\frac{4}{3})^{2/3}$, $x_2 = 2(\frac{3}{4})^{2/3} - (\frac{4}{3})^{2/3}$.

139. (3) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned}I &= \frac{1+\cos 2(\alpha+\beta)}{2} + \frac{1+\cos 2(\alpha-\beta)}{2} - \cos 2\alpha \cos 2\beta \\ &= 1 + \frac{\cos 2(\alpha+\beta) + \cos 2(\alpha-\beta)}{2} - \cos 2\alpha \cos 2\beta \\ &= 1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \cos 2\beta \\ &= 1.\end{aligned}$$

II način.

$$I = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2$$

$$\begin{aligned}
& -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\beta - \sin^2\beta) \\
= \; & \cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \\
& + \cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta \\
& - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta \\
= \; & \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta \\
= \; & (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\
= \; & 1.
\end{aligned}$$

140. (4) Napišimo polaznu jednačinu u obliku

$$9^{2\cos^2 x - 1} + 9^{\cos^2 x} = 4$$

i uvedimo smenu $t = 9^{\cos^2 x}$

$$\frac{1}{9}t^2 + t = 4.$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su $t_1 = -12$, $t_2 = 3$. Dakle, data jednačina je ekvivalentna paru jednačina

$$9^{\cos^2 x} = -12, \quad 9^{\cos^2 x} = 3.$$

Prva jednačina nema rešenja jer je eksponencijalna funkcija uvek pozitivna. Druga jednačina daje $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ novi par jednačina

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rešenja prve jednačine su

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z,$$

a druge

$$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

141. (5) Ako tražene brojeve označimo sa x i y, onda je

$$x : y = a^2 : b^2, \quad b^2 x = a^2 y, \quad b^2 x - a^2 y = 0.$$

Drugi uslov daje $x + a = y + b$. Dobijeni sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} b^2x \quad -a^2y \quad &= 0 \\ x \quad -y \quad &= b - a \end{aligned}$$

rešavamo metodom suprotnih koeficijenata

$$\begin{aligned} b^2x \quad -a^2y \quad &= 0 \\ -a^2x \quad +a^2y \quad &= -a^2(b - a). \end{aligned}$$

Diskusija. Uslov za rešenje je $y \neq 0$, a uslov za parametar je $b \neq 0$. Za $b - a \neq 0$, $b \neq a$, kao i $b + a \neq 0$, $b \neq -a$, zbir levih i desnih strana jednačina $(b^2 - a^2)x = -a^2(b - a)$ daje

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a^2}{a+b} \\ y &= x + a - b = \frac{-a^2}{a+b} + a - b = \frac{-a^2 + a^2 - b^2}{a+b} = \frac{-b^2}{a+b}. \end{aligned}$$

Za $a = b$ obe jednačine postaju $x - y = 0$, tako da je x proizvoljno i $y = x$. Za $a = -b$ sistem postaje $x - y = 0$, $x - y = -2a$, tj. $a = 0$, što je nemoguće, pa u tom slučaju problem nema rešenja.

Zaključak. Ako je $a \neq \pm b$, zadatak ima jedinstveno rešenje

$$(x, y) = \left(\frac{-a^2}{a+b}, \frac{-b^2}{a+b} \right).$$

(Provera rešenja je kratka $x : y = a^2 : b^2$ i $x + a = y + b = \frac{ab}{a+b}$.) Ako je $a = b$ zadatak ima beskonačno mnogo rešenja $(x, y) = (\alpha, \alpha)$, $\alpha \in R$. Za $a = -b$ zadatak nema rešenja. (Tada je $x : y = 1$, $x = y$, pa je neispunljiv drugi uslov $x + a = y + b$.)

2001. jun

142. (1) Algebarske transformacije datog izraza I daju

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{a-1} - \frac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{a(a-1)(a^2 + a + 1)} \right) : \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{a(a^2 + a + 1) - (a+1)(a^2 - a + 1)}{a(a-1)(a^2 + a + 1)} : \frac{1}{a(a-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a(a^2+a+1)-a(a^2-a+1)-(a^2-a+1)}{a^2+a+1} \\ &= \frac{a^2+a-1}{a^2+a+1}. \end{aligned}$$

143. (2) Jednačina je definisana za $x > 29$

$$\begin{aligned} \log_{10}(x^2+100) - \log_{10}(x-29) &= 3 \\ \log_{10}\frac{x^2+100}{x-29} &= \log_{10} 10^3 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2+100}{x-29} = 10^3, \quad x^2 - 1000x + 29100 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1000 \pm \sqrt{1000000 - 116400}}{2} = 500 \pm 470.$$

Rešenja su $x_1 = 30$, $x_2 = 970$.

144. (3) Koristeći formulu

$$\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

i oznaku L za levu stranu date jednakosti, dobija se

$$\begin{aligned} L &= \frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}} + \frac{1-\frac{b}{c+a}}{1+\frac{b}{c+a}} + \frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}} \\ &= \frac{b+c-a}{a+b+c} + \frac{a-b+c}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} \\ &= 1. \end{aligned}$$

145. (4)

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x - 1 + \cos x + \sin x &= 0, \\ 1 - 2\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 1 + \cos x + \sin x &= 0, \\ \sin x - 2\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos x &= 0, \\ \sin x(1-2\sin x) + \cos x(1-2\sin x) &= 0, \\ (\sin x + \cos x)(1-2\sin x) &= 0, \\ (\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x))(1-2\sin x) &= 0, \\ 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})(1-2\sin x) &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, dobijaju se dve jednačine

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 0, \quad \text{ili} \quad \sin x = \frac{1}{2},$$

čija su rešenja

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad \text{ili} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2l\pi, \quad \text{ili} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi,$$

gde je $k, l, m \in \mathbf{Z}$.

146. (5)

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)f(y)} &= \frac{\frac{x-1}{x+1} - \frac{y-1}{y+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1}\frac{y-1}{y+1}} \\ &= \frac{(x-1)(y+1) - (x+1)(y-1)}{(x+1)(y+1) + (x-1)(y-1)} \\ &= \frac{xy + x - y - 1 - xy + x - y + 1}{xy + x + y + 1 + xy - x - y + 1} \\ &= \frac{2x - 2y}{2xy + 2} \\ &= \frac{x - y}{1 + xy}. \end{aligned}$$

2001. septembar

147. (1) Deljenik A datog izraza je

$$A = \frac{\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}}{\frac{2}{\sqrt{a}-1}} = \sqrt{a}.$$

Za delilac B se dobija

$$B = \frac{\frac{-2}{\sqrt{a}+1}}{\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}} = -\frac{1}{\sqrt{a}},$$

tako da je $A : B = -a$.

148. (2)

$$\begin{aligned}
\log_{3^4} x + \log_{3^3} x + \log_{3^2} x + \log_{3^1} x &= \frac{25}{3}\\
\frac{1}{4}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \log_3 x &= \frac{25}{3}\\
\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)\log_3 x &= \frac{25}{3}\\
\frac{25}{12}\log_3 x &= \tfrac{25}{3}\\
\log_3 x &= 4.
\end{aligned}$$

Rešenje je $x = 3^4 = 81$.
149. (3) Leva strana

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

se postupno transformiše

$$\begin{aligned}
2 + 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta &= 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\\
1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta &= \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\\
1 + \cos(\alpha-\beta) &= 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}$$

Poslednja dobijena jednakost je poznati identitet.
150. (4)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x + \cos x}{\cos x\sin x} &= 2\sqrt{2}\\
\sin x + \cos x &= 2\sqrt{2}\cos x\sin x\\
\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x &= 8\cos^2 x\sin^2 x\\
1 + 2\sin x\cos x &= 8\cos^2 x\sin^2 x,
\end{aligned}$$

$$8t^2 - 2t - 1 = 0, \qquad t = \cos x\sin x,$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{16} = \frac{2\pm 6}{16}, \qquad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = -\frac{1}{4}.$$

Dakle,

$$2\sin x\cos x = 1,\quad \sin 2x = 1,\quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\quad k \in \mathbf{Z}.$$

Druga grupa rešenja se dobija iz jednačine

$$2\sin x\cos x = -\frac{1}{2},\quad \sin 2x = -\frac{1}{2},\quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi,\quad 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2m\pi,$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + l\pi,\quad x = -\frac{5\pi}{12} + m\pi,\quad l, m \in \mathbf{Z}.$$

Ako primetimo da je

$$\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3},\quad -\frac{\pi}{12} - \left(-\frac{5}{12}\pi\right) = \frac{\pi}{3},$$

tri dobijene grupe rešenja se mogu zapisati jednom formulom

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3},\quad k \in \mathbf{Z}.$$

Rešenja obrazuju na trigonometrijskom krugu pravilan šestougao. Leva i desna strana polazne jednačine u postupku rešavanja su kvadrirane, tako da dobijena rešenja u stvari zadovoljavaju jednačinu

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \pm 2\sqrt{2},$$

ali ne uvek i polaznu. Provera u polaznoj jednačini smanjuje skup rešenja na

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi,\quad k \in \mathbf{Z}.$$

II način.

$$\begin{aligned}
\sin x + \cos x &= 2\sqrt{2}\cos x\sin x\\
\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x &= 2\cos x\sin x\\
\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sin 2x &= 0\\
2\cos\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x + \frac{\pi}{4} - 2x}{2} &= 0\\
2\cos\frac{12x + \pi}{8}\sin\frac{\pi - 4x}{8} &= 0.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$2\frac{12x+\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad x=\frac{\pi}{4}+k\frac{2}{3}\pi, \quad k\in\mathbf{Z},$$

ili

$$\frac{\pi-4x}{8}=l\pi, \quad x=\frac{\pi}{4}+l2\pi, \quad l\in\mathbf{Z}.$$

Drugi skup rešenja, sa parametrom l, je podskup prvog skupa rešenja, sa parametrom k. Znači, skup rešenja date jednačine je

$$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{2}{3}\pi, \quad k\in\mathbf{Z}.$$

151. (5) Leva strana jednakosti je

$$\begin{aligned} f(x)+f(y) &= \log\frac{1-x}{1+x}+\log\frac{1-y}{1+y} \\ &= \log\frac{(1-x)(1-y)}{1+x)(1+y)} \\ &= \log\frac{1-x-y+xy}{1+x+y+xy}. \end{aligned}$$

Za desnu stranu se dobija isti izraz

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) &= \log\frac{1-\frac{x+y}{1+xy}}{1+\frac{x+y}{1+xy}} \\ &= \log\frac{1+xy-x-y}{1+xy+x+y}. \end{aligned}$$

2002. jun

152. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{a^3-b^3}{ab}:\frac{a^2+b^2+ab}{ab}\right]\cdot\left[1+\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)^{-2}\right]^{-1/2} \\ &= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{ab}\cdot\frac{ab}{a^2+ab+b^2}\cdot\left[1+\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a-b)\cdot\left[1+\frac{4ab}{(a-b)^2}\right]^{-1/2}\\
&= (a-b)\cdot\left[\frac{(a-b)^2+4ab}{(a-b)^2}\right]^{-1/2}\\
&= (a-b)\cdot\left[\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\right]^{-1/2} = (a-b)\cdot\sqrt{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}\\
&= (a-b)\cdot\frac{|a-b|}{|a+b|} = (a-b)\cdot\frac{a-b}{a+b}\\
&= \frac{(a-b)^2}{a+b}.
\end{aligned}
$$

153. (2) Data jednačina se može napisati u obliku

$$3\cdot(3^x)^2-28\cdot 3^x+9=0.$$

Ako se uvede smena $y=3^x$ dobija se jednačina $3y^2-28y+9=0$, čija su rešenja

$$y_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{784-108}}{6}=\frac{28\pm 26}{6}=\frac{14\pm 13}{3},$$

odnosno $y_1=1/3$ i $y_2=9$. Odgovarajuća rešenja polazne jednačine se dobijaju iz uslova $3^x=1/3$ ili $3^x=9$, tako da je $x_1=-1$ i $x_2=2$.

154. (3) Jednačina

$$\sqrt{\log_7 x}+\log_7 49+\log_7 x-14=0$$

se smenom $t=\sqrt{\log_7 x}$ transformiše u kvadratnu jednačinu

$$t^2+t-12=0, \quad \text{tj.} \quad (t-3)(t+4)=0.$$

Njena rešenja su $t_1=-4$ i $t_2=3$. Vrednost korena je nenegativna veličina, te se prvo rešenje odbacuje. Jedino rešenje za nepoznatu x se dobija iz

$$\sqrt{\log_7 x}=3, \quad \log_7 x=9, \quad x=7^9.$$

155. (4) Desna strana D identiteta je

$$D = \frac{\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{1 + 1 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)} \\
&= \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos(\alpha+\beta)}{2 + 2\cos(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos(\alpha+\beta)}{2 + 2\cos(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{\cos(\alpha+\beta)[2\cos(\alpha-\beta) + 2]}{2 + 2\cos(\alpha-\beta)} \\
&= \cos(\alpha+\beta).
\end{aligned}
$$

156. (5) v. sliku

Neka je CE visina trapeza $\square ABCD$. Ako je r dužina poluprečnika upisane kružnice, onda je $|CE| = 2r$ i

$$|BC| = |BF| + |FC| = |BG| + |CH| = a - r + b - r = a + b - 2r.$$

Primenom Pitagorine teoreme na trougao ΔBCE dobija se

$$(a + b - 2r)^2 = 4r^2 + (a - b)^2,$$

tj.

$$a^2 + b^2 + 4r^2 + 2ab - 4ar - 4br = 4r^2 + a^2 - 2ab + b^2,$$

tako da je $r = \frac{ab}{a+b}$.

2002. septembar

157. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\right]\cdot\frac{\sqrt[4]{xy}(x^2-y^2)}{\sqrt[4]{xy}(x+y)}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \\ &= \frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot(x-y)\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \\ &= 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}). \end{aligned}$$

158. (2) Data jednačina se za $9^x-1>0$ i $3^x-2>0$ može napisati kao

$$\log_{\sqrt{8}}\frac{9^x-1}{3^x-2}=2,$$

odakle je

$$(\sqrt{8})^2=\frac{9^x-1}{3^x-2},\quad \text{tj.}\quad 8=\frac{9^x-1}{3^x-2}.$$

Poslednja jednačina se posle sredjivanja svodi na jednačinu $(3^x)^2-8\cdot 3^x+15=0$. Posle smene $3^x=t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2-8t+15=0$ čija su rešenja $t_1=3$ i $t_2=5$, tako da su potencijalna rešenja zadate jednačine $x_1=1$ i $x_2=\log_3 5$. Proverom se utvrduje da su to i stvarna rešenja polazne jednačine.

159. (3) Ako označimo sa

$$p=\log_2 x,\quad q=\sin^2 y,\quad x>0,$$

kako je

$$\log_4 x=\log_{2^2} x=\frac{1}{2}\log_2 x,\quad \cos^2 y=1-\sin^2 y,$$

dobijamo sistem jednačina

$$p+q=0,\quad 2p-q=0.$$

Sabiranje levih i desnih strana ovih jednačina daje $3p=0$, $p=0$, tako da je $q=0$. Prema tome

$$\log_2 x=0\quad\Rightarrow\quad x=1,$$

$$\sin^2 y=0\quad\Rightarrow\quad y=k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

160. (4) Ako je T dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} T &= \left(\cos^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{2\sin x + 2\sin x\cos x}{2\sin x - 2\sin x\cos x} \\ &= \sin^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \\ &= \sin^2\frac{x}{2} \cdot \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} \\ &= \sin^2\frac{x}{2} \cdot \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} \\ &= \cos^2\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

161. (5) v. sliku

Neka su O i O_1 centri krugova k i k_1 respektivno. Označimo sa P i Q dodirne tačke krugova k i k_1 sa stranicom AB redom. Dalje, neka je R dodirna tačka krugova k i k_1, i S njena ortogonalna projekcija na AB. Tada je

$$AQ + QS + SP = AP = \frac{a}{2},$$

$$r + r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}, \quad \text{tj.} \quad r(2+\sqrt{2}) = \frac{a}{2}(2-\sqrt{2}),$$

tako da je

$$\begin{aligned} r &= \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{2} \\ &= \frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{6-4\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}a. \end{aligned}$$

2003. jun

162. (1) Neka je je I dati izraz

$$\begin{aligned} I &= \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(x-y)^2} \\ &= \frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(x-y)^2} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x-y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{(x-y)^2} \\ &= \frac{x-y}{x-y} = 1. \end{aligned}$$

163. (2) Rešenja $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 8\cos\alpha}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{1 - 2\cos\alpha}}{2}$ nisu realni brojevi ako je diskriminanta negativna $D < 0$

$$D = 1 - 2\cos\alpha < 0, \qquad 1 < 2\cos\alpha, \qquad \frac{1}{2} < \cos\alpha, \qquad \alpha \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}).$$

164. (3) Data logaritamska jednačina

$$\log(4 + 2^{x+2}) = \log[4(5 \cdot 2^{4-x} - 1)],$$

se svodi na eksponencijalnu jednačinu

$$4 + 2^{x+2} = 20 \cdot 2^{4-x} - 4, \qquad 4 + 2^x \cdot 2^2 = \frac{20 \cdot 2^4}{2^x} - 4.$$

Smena $2^x = t$ daje

$$8 + 4t - \frac{20 \cdot 16}{t} = 0, \qquad t^2 + 2t - 80 = 0, \qquad t_1 = -10, \qquad t_2 = 8.$$

Ako je $t_1 = -10$ ne postoji rešenje za x. Za $t_2 = 8$ je $2^x = 2^3$ tj. $x = 3$.

165. (4) Leva strana L se transformiše

$$\begin{aligned} L &= \cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y \\ &= 2 + 2\cos x \cos y + 2\sin x \sin y = 2(1 + \cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= 2(1 + \cos(x-y)) = 2 \cdot 2\cos^2(\frac{x-y}{2}) = 4\cos^2(\frac{x-y}{2}). \end{aligned}$$

166. (5) (a) $f(\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{1}{3}$,

(b) $f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$

(c) $f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1} = \frac{x-1-x-1}{x-1+x+1} = -\frac{1}{x}$,

(d) $f(f(f(x))) = f(-\frac{1}{x}) = \frac{-\frac{1}{x}-1}{-\frac{1}{x}+1} = \frac{-1-x}{-1+x} = -\frac{1}{f(x)}$,

(e) $f(f(f(f(x)))) = f(f(-\frac{1}{x})) = -\frac{1}{-\frac{1}{x}} = x$.

2003. septembar

167. (1) Ako je L leva strana datog identiteta, tada je

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\right)^{-2} + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{1-3}\right)^{-2} + 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 1 + 8 = 9. \end{aligned}$$

168. (2) Neka je I dati izraz

$$\begin{aligned} I &= \frac{2a}{a+1} + \frac{3a^2-2a+1}{(a+1)(a^2-a+1)} - \frac{a-1}{a^2-a+1} \\ &= \frac{2a^3-2a^2+2a+3a^2-2a+1-a^2+1}{(a+1)(a^2-a+1)} = \frac{2a^3+2}{a^3+1} = 2. \end{aligned}$$

169. (3) Za $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{4}$ i $x \neq \frac{1}{16}$, dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 4x} + \frac{3}{\log_4 16x} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{1+\log_4 x} + \frac{3}{2+\log_4 x} = 0.$$

Smenom $t = 1 + \log_4 x$ se dobija

$$\frac{3}{t-1} + \frac{2}{t} + \frac{3}{t+1} = 0, \qquad \text{tj.} \qquad 3t(t+1) + 2(t^2-1) + 3t(t-1) = 0,$$

tako da je $8t^2-2=0$, $t^2=1/4$, $t=\pm 1/2$. Nalazimo da je $\log_4 x=-1-1/2=-3/2$, ili $\log_4 x=-1+1/2=-1/2$, pa su rešenja $x_1=4^{-3/2}=1/8$ i $x_2=4^{-1/2}=1/2$.

170. (4) Dati izraz I se transformiše

$$I=\frac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=2.$$

II način. Adicione formule za argument $3x=2x+x$ daju

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}{\sin x}-\frac{\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x}{\cos x}\\
&= \frac{2\sin x\cos^2 x+(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin x}{\sin x}\\
&\quad -\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x-2\sin^2 x\cos x}{\cos x}\\
&= 2\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin^2 x=2.
\end{aligned}$$

171. (5) Izračunajmo dati niz funkcija

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{x-1-x-1}{x+1}}{\frac{x-1+x+1}{x+1}}=-\frac{1}{x},\\
f_3(x) &= f(f_2(x))=f\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{\frac{-1}{x}-1}{\frac{-1}{x}+1}=\frac{\frac{-1-x}{x}}{\frac{-1+x}{x}}=-\frac{x+1}{x-1},\\
f_4(x) &= f(f_3(x))=f\left(-\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{-\frac{x+1}{x-1}-1}{-\frac{x+1}{x-1}+1}=\frac{\frac{-x-1-x+1}{x-1}}{\frac{-x-1+x-1}{x-1}}=x.
\end{aligned}$$

Dakle, $f_4(x)=x$ je identična funkcija, tako da je

$$f_5(x)=f(f_4(x))=f(x)=f_1(x).$$

Zaključujemo da je niz funkcija $(f_n(x))$ periodičan sa periodom četiri. Dakle,

$$f_{2003}(x)=f(500\cdot 4+3)(x)=f_3(x),$$

tako da je

$$f_{2003}(2003)=f_3(2003)=-\frac{2003+1}{2003-1}=-\frac{2004}{2002}=-\frac{1002}{1001}.$$

2004. jun

172. (1) Uslov nenegativnosti radikanda $0 \le a - x$, tj. $x \le a$ je ekvivalentan sa $\frac{2ab}{b^2+1} \le a$, tj. $2b \le b^2 + 1$ ili $0 \le (b-1)^2$. Najpre ćemo izvršiti nekoliko transformacija, a potom zameniti vrednost za x

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} &= \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} \cdot \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} \\
&= \frac{a+x-2\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{a+x-a+x} \\
&= \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} \\
&= \frac{a-\sqrt{a^2-\frac{4a^2b^2}{(b^2+1)^2}}}{\frac{2ab}{b^2+1}} \\
&= \frac{a(b^2+1)-\sqrt{a^2(b^2+1)^2-4a^2b^2}}{2ab} \\
&= \frac{b^2+1-\sqrt{(b^2+1)^2-4b^2}}{2b} \\
&= \frac{b^2+1-\sqrt{(b^2-1)^2}}{2b} = \frac{b^2+1-|b^2-1|}{2b} \\
&= \frac{b^2+1-(1-b^2)}{2b} = b.
\end{aligned}$$

173. (2) Jednačina se transformiše u ekvivalentne

$$\frac{1}{2^3} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{2^{-2}}{2^{1/2}}\right)^{-x}, \qquad 2^{-3+4x-16} = 2^{(-5/2)(-x)},$$

$$4x - 19 = \frac{5}{2}x, \qquad x = \frac{38}{3}.$$

174. (3) Neka je $u = \log_2 x$ i $v = \log_4 y$. Sistem sada glasi $u - v = 3$, $uv = 10$. Iz prve jednačine je $u = v + 3$. Zamena u drugu jednačinu daje $(v+3)v = 10$, $v^2 + 3v - 10 = 0$,

$$v_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}, \qquad v_1 = 2, \quad v_2 = -5.$$

Tako je $u_1 = 5$ i $u_2 = -2$, odnosno $(u_1, v_1) = (5, 2)$ i $(u_2, v_2) = (-2, -5)$. Iz $\log_2 x = 5$ sledi $x = 2^5 = 32$, a iz $\log_4 y = 2$, sledi $y = 4^2 = 16$. Slično $\log_2 x = -2$ daje $x = 2^{-2} = 1/4$, a $\log_4 y = -5$ daje $y = 4^{-5} = 2^{-10} = 1/1024$. Rešenja su $(x, y) = (32, 16)$ i $(x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{1024})$.

175. (4) Ako je L leva strana date jednačine, tada je

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{1-\sin\alpha}} - \frac{\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{(1+\sin\alpha)^2} - \sqrt{(1-\sin\alpha)^2}}{\sqrt{1-\sin\alpha}\sqrt{1+\sin\alpha}} \\ &= \frac{1+\sin\alpha-(1-\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ &= 2\tan\alpha. \end{aligned}$$

176. (5)

$$\begin{aligned} \frac{f(2x)}{1+2x} \cdot \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{1+x} &= \frac{\frac{4x^2-4}{2x-1}}{1+2x} \cdot \frac{\frac{\frac{1}{x^2}-4}{\frac{1}{x}-1}}{1+x} = \frac{4(x^2-1)}{(2x-1)(2x+1)} \cdot \frac{\frac{1-4x^2}{x-x^2}}{1+x} \\ &= \frac{4(x^2-1)}{4x^2-1} \cdot \frac{1-4x^2}{x(1-x)(1+x)} = \frac{4}{x}. \end{aligned}$$

2004. septembar

177. (1) Ako je I dati izraz, tada

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{a-1} - \frac{a^3+1}{a(a-1)(a^2+a+1)}\right) \cdot \frac{a(1-a)(1+a)}{a+1} \\ &= \frac{a^3+a^2+a-(a^3+1)}{a(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{a(1-a)}{1} \\ &= -\frac{a^2+a-1}{a^2+a+1} = \frac{1-a-a^2}{1+a+a^2}. \end{aligned}$$

178. (2) Zamenom redosleda stepenovanja npr. $16^x = (2^4)^x = 2^{4x} = (2^x)^4$ sledi

$$3(2^x)^4 + 2(3^x)^4 = 5 \cdot (2^x)^2(3^x)^2.$$

Ako se uvedu smene $2^x = y$ i $3^x = z$ dobija se

$$3y^4 + 2z^4 = 5y^2z^2.$$

Podelimo ovu jednačinu sa z^4

$$3\left(\frac{y}{z}\right)^4 + 2 = 5\left(\frac{y}{z}\right)^2.$$

Smena $t = y/z$ daje bikvadratnu jednačinu

$$3t^4 - 5t^2 + 2 = 0, \qquad t_{1,2}^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}.$$

Tako je $t^2 = 2/3$ ili $t^2 = 1$. Dakle $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$, te je $x_1 = 1/2$. Slično $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1$, daje $x_2 = 0$. Rešenja su $x_1 = 1/2$ i $x_2 = 0$.

179. (3)

$$\begin{aligned}\log_{2^2} x + \log_{2^4} x + \log_2 x &= 7\\ \tfrac{1}{2}\log_2 x + \tfrac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x &= 7\\ \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + 1\right)\log_2 x &= 7\end{aligned}$$

$$\frac{2+1+4}{4}\log_2 x = 7, \qquad \log_2 x = 4, \quad x = 2^4, \quad x = 16.$$

180. (4)

$$\begin{aligned}\frac{\cos 4x + 1}{\cot x - \tan x} &= \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x + \sin^2 2x + \cos^2 2x}{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}\\ &= \frac{2\cos^2 2x}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}} = \frac{2\cos^2 2x \sin x \cos x}{\cos 2x}\\ &= \cos 2x \sin 2x = \frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x \cos 2x\\ &= \frac{1}{2}\sin 4x.\end{aligned}$$

181. (5)

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} + \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x}\\ &= \frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1-2x+x^2+1+2x+x^2}{(1+x)(1-x)}\\ &= 2\frac{1+x^2}{1-x^2}.\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = 2\frac{1+x^2}{x^2-1}.$$

2005. jun

182. (1) I način. Najmanji zajednički imenilac je $(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$. Koeficijent uz x^3 je

$$x^3[(c-a)(c-b)(b-a)-(c-a)(d-b)(b-a)+(d-a)(d-c)(c-a)-(d-b)(d-c)(c-b)] = x^3 \cdot 0 = 0,$$

itd.

II način. Neka je $P(x)$ polinom sa desne strane jednakosti. Ako se data jednakost tretira kao jednačina, ona ima četiri rešenja $x = a$, $x = b$, $x = c$ i $x - d$. Jednačina je trećeg stepena

$$P(x) - 1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

gde su A, B, C i D neki koeficijenti koji zavise od parametara a, b, c, d. Algebarska jednačina trećeg stepena ima najviše tri različita rešenja. Četiri rešenja su moguća jedino ako su svi koeficijenti jednaki nuli $A = B = C = D = 0$. Tada je polinom identički jednak nuli i jednačina važi za sve x, tako da ona mora biti jednakost (identitet) koji važi za sve x. Rezime. Ako je jednačina trećeg stepena jednaka nuli za četiri različite vrednosti x, tada je data jednačina jednaka nuli za sve vrednosti x.

183. (2) Ako se data jednačina podeli sa 4^x dobija se

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x = 2, \quad \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0.$$

Rešavanjem ekvivalentne kvadratne jednačine po $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ dobija se $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$ i $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -2$. Druga od ove dve jednačine nema realnih rešenja, pa je $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$, odnosno $x_1 = 0$ jedino rešenje polazne jednačine.

184. (3) Data jednačina ima smisla (u skupu realnih brojeva) ako je $|x| > 1$ i $x > 0$, presek ovih uslova daje $x > 1$. Dalje je

$$\log\sqrt{x^4-1} = \log x, \qquad \sqrt{x^4-1} = x, \qquad x^4 - x^2 - 1 = 0.$$

Dobijena bikvadratna jednačina ima rešenja

$$x_{1,2}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}.$$

Rešenja su koreni brojeva zlatnog preseka, od kojih samo jedan zadovoljava uslov da je veći od 1, a to je $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
185. (4) I način.

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha + \cos\alpha &= \cos 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin 2\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha 2\sin\alpha\\ &= \cos(2\alpha - \alpha) + \sin(\alpha + 2\alpha).\end{aligned}$$

II način. Adiciona formula za $\sin(2\alpha + \alpha)$ i množenje daju ekvivalentnu jednakost

$$\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha\sin 2\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha + \cos\alpha\cos 2\alpha.$$

Skraćivanje istih članova vodi do identiteta

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \sin\alpha\sin 2\alpha + \cos\alpha\cos 2\alpha\\ &= \cos(2\alpha - \alpha) = \cos\alpha.\end{aligned}$$

186. (5) Oslobađanje od razlomka daje formulu za razliku stepena

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = x^{n+1} - 1,$$

a množenje dokazuje formulu

$$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n+1} - 1 - x - x^2 - \cdots - x^n = x^{n+1} - 1.$$

2005. septembar

187. (1)
188. (2) Vrednost izraza je $4 + 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 3$.
189. (3) Oslobađanje od logaritma daje eksponencijalnu jednačinu

$$2^{3-x} = 9 - 2^x, \qquad \frac{8}{2^x} = 9 - 2^x.$$

Može se uvesti smena $t = 2^x$, tako da jednačina postaje preglednija $\frac{8}{t} = 9 - t$. Jednačina je ekvivalentna kvadratnoj jednačini $8 = 9t - t^2$, odnosno $t^2 - 9t + 8 = 0$ čija su rešenja

$$t_{1,2} = \frac{9 + \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2}, \quad t_1 = 1. \quad t_2 = 8.$$

Dakle, $2^x = 1$ i $2^x = 8$, tako da su rešenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$.

190. (4) Adiciona formula za $\cos(2\alpha + \alpha)$ i množenje daju

$$\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha + \sin \alpha = \cos \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha,$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \sin 2\alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin(2\alpha - \alpha) = \sin \alpha.$$

191. (5) Sa leve strane jednakosti se očigledno nalazi $n + 1$ sabiraka a, tako da ostaje da se dokaže da je

$$d + 2d + \cdots + nd = (n + 1)\frac{nd}{2}.$$

Ova jednakost se svodi na formulu za zbir prvih n prirodnih brojeva

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \tag{4}$$

Dokaz se može izvesti metodom matematičke indukcije. **Indukcijska baza.** Za $n = 1$ formula (4) je tačna $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. **Indukcijski korak.** Pretpostavimo da je formula (4) tačna za $n = k$

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Treba dokazati da je formula (4) tačna za $n = k + 1$

$$1 + 2 + \cdots + k + 1 = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}.$$

Ova jednakost se može izvesti na osnovu indukcijske pretpostavke i elementarne algebre

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + 1 &= (1 + 2 + \cdots + k) + k + 1 = \frac{k(k + 1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}. \end{aligned}$$

II način. Gausov metod. Ako je $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$, tada je

$$\begin{aligned} 2S_n &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n + \cdots + 2 + 1) \\ &= (1 + n) + (2 + n - 1) + \cdots + ((n - 1) + 2) + (n + 1) = n(n + 1). \end{aligned}$$

2006. jun

192. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \frac{(a^3 - b^3)(a + b)}{(a + b)^2 - ab} - \frac{(a^3 + b^3)(a - b)}{(a - b)^2 + ab} \\ &= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)}{a^2 + 2ab + b^2 - ab} - \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)}{a^2 - 2ab + b^2 + ab} = 0. \end{aligned}$$

193. (2) Smena $9^x = t$ daje kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 10t + 9 = 0, \qquad (t - 1)(t - 9) = 0$$

čija su rešednja $t_1 = 1$ i $t_2 = 9$, tako da je $9^x = 1$ tj. $x_1 = 0$ i $9^x = 9$ tj. $x_2 = 1$.

194. (3) Transformacije daju

$$\log_2 xy = \log_2 2 + \log_2 6 = \log_2 12,$$

tako da je $xy = 12$, $x + y = 49^{1/2} = 7$. Iz druge jednačine $y = 7 - x$ smena u prvu daje $x(7 - x) = 12$, $7x - x^2 = 12$, $x^2 - 7x + 12 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}, \qquad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

Rešenja sistema su $(x_1, y_1) = (3, 4)$ i $(x_2, y_2) = (4, 3)$.

195. (4)

$$\frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha(1 - \cos\alpha)}{2\sin\alpha(1 + \cos\alpha)} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan^2\frac{\alpha}{2}.$$

196. (5) Najpre uprostimo

$$f(x) = \frac{(x + 1)^2 - (x - 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = \frac{4x}{x^2 - 1},$$

tako da je

$$f(f(x)) = f\left(\frac{4x}{x^2 - 1}\right) = \frac{4 \cdot \frac{4x}{x^2 - 1}}{\frac{16x^2}{(x^2 - 1)^2} - 1} = \frac{16x(x^2 - 1)}{16x^2 - (x^2 - 1)^2}.$$

2007. jun

197. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{a-\sqrt{b}+a+\sqrt{b}}{a^2-b}\right)^{-2} + \left(a+\sqrt{b}\right)^2 + \left(a-\sqrt{b}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2a}{a^2-b}\right)^{-2} + a^2 + 2a\sqrt{b} + b + a^2 - 2a\sqrt{b} + b \\
&= \frac{(a^2-b)^2}{4a^2} + 2a^2 + 2b \\
&= \frac{a^4 - 2a^2b + b^2 + 8a^4 + 8a^2b}{4a^2} \\
&= \frac{9a^4 + 6a^2b + b^2}{4a^2} = \left(\frac{3a^2+b}{2a}\right)^2.
\end{aligned}$$

198. (2) Smena $2^x = t$ daje $2^x + \frac{2}{2^x} - 3 = 0$, $t + \frac{2}{t} - 3 = 0$, $t^2 - 3t + 2 = 0$, $(t-1)(t-2) = 0$, tako da su rešenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 2$, odnosno $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$.
199. (3) Ako se uvede smena $\sqrt{\log_2 x} = t$, jednačina dobija oblik $t - 3 - t^2 + 5 = 0$, tj. $t^2 - t - 2 = 0$. Uslov $t \geq 0$ ispunjava samo rešenje $t_1 = 2$. Dakle $\sqrt{\log_2 x} = 2$, $\log_2 x = 4$, tako da je $x = 2^4 = 16$.
200. (4)

$$\begin{aligned}
A &= 3cos^4 x - 2\cos^6 x - (1-\cos^2 x)^2(2 - 2\cos^2 x - 3) \\
&= 3cos^4 x - 2\cos^6 x - (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)(-1 - 2\cos^2 x) \\
&= 3cos^4 x - 2\cos^6 x + 1 + 2\cos^2 x - 2\cos^2 x - 4\cos^4 x + \cos^4 x + 2\cos^6 x \\
&= 1.
\end{aligned}$$

201. (5)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}. \\
f(f(x)) &= \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{1}{1-x}. \\
f(f(f(x))) &= \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = x.
\end{aligned}$$

2007. septembar

202. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x^2-y^2)} + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2-xy+y^2+2xy-2y^2-xy}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2-y^2}{(x-y)(x+y)} = 1. \end{aligned}$$

203. (2) Najpre je $2^{\log_2 x} = x$, za $x > 0$, i slično

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x} = 2^{-\log_2 x} = 2^{\log_2 \frac{1}{x}} = \frac{1}{x},$$

tako da se dobija

$$x + \frac{1}{x} = 2,5 \quad \text{tj.} \quad x^2 - 2,5x + 1 = 0.$$

Rešenja ove jednačine su $x_1 = 2$ i $x_2 = \frac{1}{2}$.

204. (3) Transformacije daju

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} = \left(\frac{16}{25}\right)^{2(1+\sqrt{x})}, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} = \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})},$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{1-x} = \left(\frac{16}{25}\right)^{2(1+\sqrt{x})}, \quad x - 1 = 4(1+\sqrt{x}).$$

Ako je $t = \sqrt{x}$ tada $t^2 - 1 - 4 - 4t = 0$, $t^2 - 4t - 5 = 0$, tako da je $t_1 = -1$ i $t_2 = 5$. Dobija se samo jedno rešenje polazne jednačine $x = 25$.

205. (4) Transformacije daju identitet

$$\begin{aligned} \frac{1+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{1+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} &= \tan 2\alpha \\ \frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha + 2\sin^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha} &= \tan 2\alpha \\ \frac{2\sin 2\alpha(\cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha)} &= \tan 2\alpha. \end{aligned}$$

206. (5) Najpre uprostimo

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{\frac{1+x-1}{1+x}} = \frac{1+x}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= 1 + \frac{1}{\frac{1+x}{x}} = 1 + \frac{x}{1+x} = \frac{1+2x}{1+x}, \\
f(f(f(x))) &= 1 + \frac{1}{\frac{1+2x}{1+x}} = 1 + \frac{1+x}{1+2x} = \frac{2+3x}{1+2x}, \\
f^4(x) &= 1 + \frac{1}{\frac{2+3x}{1+2x}} = 1 + \frac{1+2x}{2+3x} = \frac{3+5x}{2+3x}, \\
f^5(x) &= 1 + \frac{1}{\frac{3+5x}{2+3x}} = 1 + \frac{2+3x}{3+5x} = \frac{5+8x}{3+5x}, \\
f^6(x) &= 1 + \frac{1}{\frac{5+8x}{3+5x}} = 1 + \frac{3+5x}{5+8x} = \frac{8+13x}{5+8x}, \ldots \quad .
\end{aligned}$$

Induktivno se dokazuje da je

$$F^n(x) = \frac{F_n + F_{n+1}x}{F_{n-1} + F_n x}, \qquad n \geq 2 \qquad\qquad (*),$$

gde su F_n članovi Fibonačijevog niza

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ ...,$$

čije su generativne formule

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad \text{i} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Formula (*) je tačna i za $n = 1$, pod uslovom da se dodefiniše $F_0 = 0$.

2008. jun

207. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$I \;=\; \left(1 + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\right)^{-2}\right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1+\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^{-2}\right)^{1/2} = \left(1+\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)^{-2}\right)^{1/2}\\
&= \left(1+\frac{4ab}{(a-b)^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{a^2-2ab+b^2+4ab}{(a-b)^2}\right)^{1/2}\\
&= \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\right)^{1/2} = \frac{|a+b|}{|a-b|} = \frac{a+b}{b-a}.
\end{aligned}
$$

208. (2)

$$\log_3^2 x + 2\log_3 x\,(\log_3 3 - \log_3 x) = 1$$

Smena $t=\log_3 x$, tako da je $t^2+2t(1-t)=1$, $t^2-2t+1=0$, $t=1$, $x=3$.

209. (3) Data jednačina se za $4^x-6>0$ i $2^x-2>0$ može napisati kao

$$\log_{\sqrt{5}}\frac{4^x-6}{2^x-2}=2,$$

odakle je $5=\frac{4^x-6}{2^x-2}$. Posle sreīvanja se dobija $(2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0$. Smenom $2^x=t$ dobija se kvadratna jednačina $t^2-5t+4=0$, čija su rešenja $t_1=1$ i $t_2=4$. Potencijalna rešenja jednačine su $x_1=0$ i $x_2=2$, meūtim samo drugo rešenje $x_2=2$ zadovoljava polaznu jednačinu.

210. (4)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha} &= \frac{\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\\
&= \frac{\sin\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}\\
&= \tan\alpha.
\end{aligned}
$$

211. (5) (a)

$$\sin 2x = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x} = 2\sin x\cos x.$$

$$(b)\quad \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x-y}{2}} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

2008. septembar

212. (1) Data nejednakost ekvivalentna je sa $\frac{-1}{(x-1)(x-2)} > 0$, odnosno sa $(x-1)(x-2) < 0$, a odatle sledi da je $x \in (1,2)$.
213. (2) Imamo niz ekvivalentnih transformacija

$$\begin{aligned} (a+d+b+c)\cdot(a+d-(b+c)) &= (a-d-(b-c))\cdot(a-d+(b-c)) \\ (a+d)^2-(b+c)^2 &= (a-d)^2-(b-c)^2 \\ a^2+2ad+d^2-b^2-2bc-c^2 &= a^2-2ad+d^2-b^2+2bc-c^2, \\ 4ad &= 4bc, \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{d}. \end{aligned}$$

214. (3) S obzirom da je $\sin\alpha \pm \cos\alpha \leq 0$, za $\frac{5\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{7\pi}{4}$, sledi

$$\begin{aligned} -\sqrt{1+\sin 2\alpha}-\sqrt{1-\sin 2\alpha} &= -\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}-\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2} \\ &= \sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha = 2\sin\alpha, \\ -\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha} &= -\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2} \\ &= \sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha+\cos\alpha = 2\cos\alpha. \end{aligned}$$

2009. jun

215. (1) Ako je I dat izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{p+q}-\frac{p^2+pq+q^2}{p^3-q^3}\right]\cdot\frac{p^2-q^2}{2p^2}+\frac{1}{p^2+p} \\ &= \left[-\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p-q}\right]\cdot\frac{p^2-q^2}{2p^2}+\frac{1}{p^2+p} \\ &= -\frac{2p}{(p+q)(p-q)}\cdot\frac{p^2-q^2}{2p^2}+\frac{1}{p^2+p} \\ &= -\frac{1}{p}+\frac{1}{p(p+1)} = \frac{-p-1+1}{p(p+1)} = -\frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

216. (2) Uvođenjem smene $7^x = t$, jednačina postaje $t^2-8t+7=0$, odakle se dobija $t_1 = 1$, $t_2 = 7$. Rešenja su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$.
217. (3) Transformišimo jednačinu

$$\frac{\log x(5x+8)}{\log(5x-4)} = 2, \qquad \log x(5x+8) = \log(5x-4)^2.$$

Antilogaritmovanje daje

$$x(5x+8)=(5x-4)^2, \qquad 5x^2+8x=25x^2-40x+16.$$

Dobijena kvadratna jednačina

$$20x^2-48x+16=0, \quad \text{tj.} \quad 5x^2-12x+4=0$$

ima rešenja

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{10}=\frac{12\pm\sqrt{64}}{10}=\frac{6\pm4}{5}, \qquad x_1=2, \quad x_2=\frac{2}{5},$$

od kojih je samo $x_1=2$ i rešenje polazne jednačine.

218. (4) Ako je L leva strana jednakosti, tada je

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sin(\alpha+2\alpha)}{\sin\alpha}-\frac{\cos(\alpha+2\alpha)}{\cos\alpha} \\ &= \frac{\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha\cos2\alpha-\sin\alpha\sin2\alpha}{\cos\alpha} \\ &= \frac{\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha\cos2\alpha-\sin\alpha2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} \\ &= \cos2\alpha+2\cos^2\alpha-\cos2\alpha+2\sin^2\alpha=2. \end{aligned}$$

219. (5)

(a) $\sin2x=2\sin x\sqrt{1-\sin^2x}=2\sin x\cos x,$

(b) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sqrt{1-\sin^2\frac{x-y}{2}}=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$

2009. septembar

220. (1) Ako je L izraz sa leve strane, tada je

$$\begin{aligned} L &= \frac{2a^2+7a+3-(1-2a)(a-1)-3(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a+1} \\ &= \frac{2a^2+7a+3-a+1+2a^2-2a-3a^2-3a-3}{(a-1)(a^2+a+1)} \\ &= \frac{a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1)}=\frac{1}{a-1}. \end{aligned}$$

221. (2) Uvođenjem smene $t = \log x$, dobija se

$$\frac{3-t}{5-t} + \frac{t}{1+t} = 1.$$

Oslobađanje od razlomaka daje

$$\begin{aligned} (3-t)(1+t) + t(5-t) &= (5-t)(1+t) \\ 3 + 3t - t - t^2 + 5t - t^2 &= 5 + 5t - t - t^2, \end{aligned}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \qquad (t-1)(t-2) = 0, \qquad t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

Tako je $\log x = 1$, $x_1 = 10$, a drugo rešenje $\log x = 2$, $x_2 = 100$.
222. (3) Ako je L leva strana jednakosti, tada je

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}}{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)} + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \\ &= \frac{|\sin\alpha - \cos\alpha|}{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)} + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \\ &= \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \\ &= \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha. \end{aligned}$$

2010. jun

223. (1) Ako je L izraz sa leve strane, tada je

$$L = \left(\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}\right)^2 = 1.$$

224. (2) Uvođenjem smene $t = 7^x$, dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 6t - 7 = 0$, čija su rešenja $t_1 = -1$ i $t_2 = 7$. Eksponencijalna funkcija je uvek pozitivna tako da je $7 = 7^x$, odnosno $x = 1$ jedino rešenje polazne jednačine.
225. (3) Kako je $\frac{2}{5} = 0,4$; to iz jednakosti stepena sledi jednakost eksponenata $\log_{0,25}(x^2 + 5x + 8) = -1$. Ova logaritamska jednačina daje ekvivalentnu

kvadratnu jednačinu $x^2 + 5x + 8 = 0,25^{-1} = 4$ čija su rešenja $x_1 = -1$ i $x_2 = -4$.

226. (4) Formula za zbir kubova daje

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)\\ &= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x\\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x,\end{aligned}$$

dok je $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, tako da se dobija ekvivalentna jednačina

$$1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = a(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x).$$

Transformacija $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ daje

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right).$$

Ako se uvede smena $t = \sin^2 2x$, iz poslednje jednačine se dobija $t = \frac{4(a-1)}{2a-3}$, $a \neq \frac{3}{2}$. Jednačina ima rešenje ako i samo ako je $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$, odnosno ako je $0 \leq \frac{4(a-1)}{2a-3} \leq 1$. Rešavanje sistema jednačina daje $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Za $a = 3/2$ jednačina nema rešenja jer je

$$\sin^6 x + \cos^6 x \leq \sin^4 x + \cos^4 x < \frac{3}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

227. (5)

$$f(x+5) - f(x-5) = \frac{x-5}{x+15} - \frac{x-15}{x+5} = \frac{x^2 - 25 - x^2 + 225}{(x+5)(x+15)} = \frac{200}{(x+5)(x+15)}.$$

2010. septembar

228. (1) Ako je R dati razlomak, tada je

$$R = \frac{\frac{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2 - (b^2+c^2-a^2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2a^2}{(a^2+b^2+c^2)^{3/2}}.$$

229. (2) Uvođenjem smene $t = 3^{\tan x}$, dobija se ekvivalentna kvadratna jednačina $t^2 - 2t - 3 = 0$, $(t-3)(t+1) = 0$, čija su rešenja $t_1 = -1$ i $t_2 = 3$.

Eksponencijalna funkcija je uvek pozitivna tako da je $3 = 3^{\tan x}$. Dobija se $\tan x = 1$, odnosno $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

230. (3) Najpre je

$$f(x) = \log_7 x + 7\log_3 9 + 7\log_3 x = \log_7 x + 7\log_3 x + 14.$$

Dalje je

$$f(\frac{1}{x}) = \log_7 x^{-1} + 7\log_3 x^{-1} + 14 = -\log_7 x - 7\log_3 x + 14,$$

tako da se sabiranjem dobija tražena jednakost.

231. (4) Stepenovanjem identiteta $(\sin^2 x + \cos^2 x)^4 = 1$, dobija se

$$\sin^8 x + 4\sin^6 x\cos^2 x + 6\sin^4 x\cos^4 x + 4\sin^2 x\cos^6 x + \cos^8 x = 1,$$

$$\begin{aligned}
\sin^8 x + \cos^8 x &= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x(\sin^4 x + \cos^4 x) - 6\sin^4 x\cos^4 x \\
&= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) - 6\sin^4 x\cos^4 x \\
&= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x, \\
&= 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x.
\end{aligned}$$

232. (5) Za $n = 1$ relacija postaje $a_1^2 - a_0a_2 = -1$, $9 - a_2 = -1$, odnosno $a_2 = 10$. Za $n = 2$ se dobija $a_2^2 - a_1a_3 = 1$, $100 - 3a_3 = 1$, tako da je $a_3 = \frac{99}{3} = 33$.

2011. jun

233. (1) Ako je I dat izraz, tada je

$$\begin{aligned}
I &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+1} \cdot \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} : \left[\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \cdot \frac{x-1}{x}\right] \\
&= \left(\frac{x}{x+1}\right)^2.
\end{aligned}$$

234. (2) Uvođenjem smene $t = 11^x$, dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 12t + 11 = 0$, čija su rešenja $t_1 = 1$, $t_2 = 11$. Rešenja su polazne jednačine su $11^x = 1$, $x_1 = 0$, i $11^x = 11$, $x_2 = 1$.

235. (3) Kako je $1=\log_2 2$, dobija se

$$\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 \frac{7}{2}, \qquad x-y=25^{1/2}.$$

Dalje je $\frac{x}{y}=\frac{7}{2}$, $x-y=5$, odnosno $x=7$, $y=2$.

236. (4) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{2\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)^2} \\ &= \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\frac{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cdot\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} \\ &= \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

237. (5) Uvodi se smena $t=1+\sqrt{x}$, iz koje je $t-1=\sqrt{x}$, $x=(t-1)^2$. Tako je $f(t)=x$, odnosno

$$f(t)=(t-1)^2, \qquad f(x)=(x-1)^2.$$

Sada se može odrediti i

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f((x-1)^2)=\left((x-1)^2-1\right)^2 \\ &= (x^2-2x)^2=x^2(x-2)^2. \end{aligned}$$

2011. septembar

238. (1) Ako je I dat izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a-1}\frac{a-a^3}{a+1}-\frac{a^3+1}{a^4-a}\frac{a-a^3}{a+1} \\ &= \frac{1}{a-1}\frac{a(1-a^2)}{a+1}-\frac{a^3+1}{a(a^3-1)}\frac{a(1-a^2)}{a+1} \\ &= -\frac{1}{a-1}\frac{a(a+1)(a-1)}{a+1}+\frac{a^3+1}{a(a-1)(a^2+a+1)}\frac{a(a+1)(a-1)}{a+1} \\ &= -a+\frac{a^3+1}{a^2+a+1}=\frac{1-a-a^2}{1+a+a^2}. \end{aligned}$$

239. (2) Uvođenjem smene $x = 7^t$, dobija se kvadratna jednačina $x^2 - 8x + 7 = 0$, čija su rešenja $x_1 = 1$, $t_2 = 7$. Rešenja su polazne jednačine su $7^t = 1$, $t_1 = 0$, i $7^t = 7$, $t_2 = 1$.
240. (3) Izraz date funkcije se može prethodno uprostiti

$$f(x) = \log_x 6 + 3(\log_3 9 + \log_3 x) = \log_6 x + 3\log_3 x + 6.$$

Korišćenjem formule $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ nalazimo

$$f(x) + f(1/x) = \log_x 6 + 3\log_3 x + 6 - \log_6 x - 3\log_3 x + 6 = 12.$$

241. (4)
$$\begin{aligned} \sin^5 x - \sin x \cos^4 x &= \sin x(\cos^4 x - \sin^4 x) \\ &= \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= \sin x \cos 2x. \end{aligned}$$

2012. jun

242. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$I = \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^3 - 1}{x+1} = -1.$$

243. (2)

$$I = \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y - (x + 2\sqrt{xy} + y)} = \frac{2\sqrt{x+y}}{-2\sqrt{xy}} = -\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

244. (3) Kako je $1/4 = 2^{-2}$, iz date jednačine izlazi

$$x^2 - 2x - 10 = -2, \qquad x^2 - 2x - 8 = 0, \qquad (x-4)(x+2) = 0.$$

Rešenja su $x_1 = 4$ i $x_2 = -2$, tako da je $x_1^2 + x_2^2 = 20$.
245. (4) Korišćenjem formule $\log_b a = \log_2 a / \log_2 b$ mogu se izjednačiti osnove logaritama. Jednostavniji postupak sledi iz obrasca $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$

$$4\log_2^2 x + 3\log_2 x - \log_2 x = 2, \qquad 2\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = 0.$$

Ova kvadratna jednačina ima dva rešenja

$$\log_2 x = -1, \quad x_1 = \frac{1}{2}; \qquad \log_2 x = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}.$$

246. (5)
$$\begin{aligned} L &= \frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x} \\ &\quad+\frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x-\cos x} \\ &\quad+\frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x-\cos^2 x} \\ &= 1-\sin x\cos x+1+\sin x\cos x+1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

2012. jun - Matematika sa proverom sklonosti

247. (1)

$$I=\left(\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\right):\frac{97}{7}\right)^{-1/2}=\left(\frac{27+70}{63}\cdot\frac{7}{97}\right)^{-1/2}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2}=9^{1/2}=3.$$

248. (2) Za korene kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$ važe Vietove formule $x_1+x_2=-p$ i $x_1x_2=q$. Tako je $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$. U našem slučaju je $x_1^2+x_2^2=9\alpha^2-2\alpha^2=7\alpha^2$.

249. (3) $$\frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x)}{2-2\sin x\cos x}=\frac{\cos x+\sin x}{2}.$$

2012. septembar

250. (1)
$$\begin{aligned} I(a,b) &= \frac{3ab-(a+b)^2}{ab}\cdot\frac{b^2-a^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \\ &= \frac{a^2-ab+b^2}{ab}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{ab}\cdot\frac{ab}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \\ &= \frac{a-b}{ab}. \end{aligned}$$

251. (2) Uvođenjem smene $t=2012^x$ se dobija kvadratna jednačina

$$t^2-2013t+2012=0,\qquad t^2-t-2012t+2012=0,$$

$$t(t-1)-2012(t-1)=0,\qquad (t-1)(t-2012)=0.$$

Rešenja su $t_1=1$, $2012^x=1$, $x_1=0$, kao i $t_2=2012$, $2012^x=2012$, $x_2=1$.

252. (3) Jednačina ima smisla ako je $x \geq 1$. U tom slučaju je $x+2\sqrt{x-1} > 0$, ali je i $x-2\sqrt{x-1} \geq 0$, jer je $x \geq 2\sqrt{x-1}$, $x^2 \geq 4(x-1)$, $x^2-4x+4 \geq 0$, $(x-2)^2 \geq 0$. Kvadriranjem leve i desne strane jednačine se dobija

$$|x+2\sqrt{x-1}| + 2\sqrt{x^2-4|x-1|} + |x-2\sqrt{x-1}| = 4,$$

$$x+2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2-4(x-1)} + x-2\sqrt{x-1} = 4,$$

$$2x+2\sqrt{x^2-4x+4} = 4, \quad x-2+|x-2| = 0.$$

Za $x > 2$ dobija se $x-2+x-2=0$, $x=2$ vrednost koja nije u domenu. Za $x < 2$ dobija se $x-2-(x-2)=0$, $0=0$ te je poslednja jednačina tačna za sve $x \leq 2$. Uzimajući u obzir početni uslov, zadata jednačina ima za rešenja sve vrednosti iz interval $x \in [1,2]$.

253. (4)
$$\begin{aligned} L &= \frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x)}{2-\sin 2x} \\ &= \frac{(\cos x+\sin x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)}{2-\sin 2x} = \frac{\cos x+\sin x}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

2013. jun

254. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \frac{x-1+x+1}{x(x+1)(x-1)} : \frac{x^2+1-x^2+1}{x(x^2-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{2}{x^2-1} : \frac{2}{x(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x^2-1}\cdot\frac{x(x^2-1)(x^2+1)}{2} \\ &= x(x^2+1). \end{aligned}$$

255. (2) Ako je I dati izraz

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}-\frac{a}{b}+2-\frac{b}{a}} \\ &= \frac{2\frac{a}{b}+2\frac{b}{a}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{ab}. \end{aligned}$$

Za konkretne vrednosti $a = 2$ i $b = 3$ se dobija $13/12$.
256. (3) Uvodjenjem nove nepoznate $t = 7^x$ dobija se kvadrana jdnačina $t^2 - 50t + 49 = 0$. Dobijaju se dva rešenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 49$. Tako je $7^x = 1$, tj. $x_1 = 0$; i $7^x = 49$, tj. $x_2 = 2$.
257. (4) Jednačina se može napisati u obliku

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x,$$

odnosno $\cos^4 x = 0$, koja je ekvivalentna sa $\cos x = 0$, čija su rešenja $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gde je $k \in Z$ ceo broj.
258. (5) Uvodni korak u rešavanju može biti transformacija

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Tako je

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = x.$$

Kako je $f(f(x)) = x$ identička funkcija, to znači da je $f = f^{-1}$ funkcija jednaka svojoj inverznoj funkciji.

2013. jun - Matematika sa proverom sklonosti

259. (1) $$\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{5} : \frac{6}{10}\right] : \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right] \cdot 16 = \frac{6}{3} \cdot 16 = 32.$$

260. (2) $$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} : \left[\frac{a+b}{ab} : \frac{b-a}{ab}\right] = \left[\frac{a+b}{ab} \cdot \frac{ab}{b-a}\right]^{-1} = \frac{b-a}{b+a}.$$

261. (3) Prva jednačina daje $\log_{2013} \frac{x}{y} = 1$, odakle je $\frac{x}{y} = 2013$. Uzimajući u obzir i drugu jednačinu dobija se rešenje $x = 2013$, $y = 1$.

2013. septembar

262. (1) Transformacije leve strane daju

$$\begin{aligned} L &= \left[\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{b+a}{ab} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a+b}{ab} \\ &= \frac{1}{ab}. \end{aligned}$$

263. (2) Uvodjenjem nove nepoznate $t = 9^x$ dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 82t + 81 = 0$. Dobijaju se dva rešenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 81$. Tako je $9^x = 1$, tj. $x_1 = 0$; i $9^x = 81$, tj. $x_2 = 2$.
264. (3) Sabiranje logaritama daje

$$\log_{2013}(2012 + x)(2014 - x) = 2, \qquad (2012 + x)(2014 - x) = 2013^2.$$

Dalje je $(2013 + x - 1)(2013 - (x - 1)) = 2013^2 - (x - 1)^2 = 2013^2$. Tako je $x - 1 = 0$ tj. $x = 1$.
265. (4) Uvodni korak u rešavanju može biti transformacija

$$f(x) = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Tako je

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x-1-x-1}{x-1}}{\frac{x-1+x+1}{x-1}} = -\frac{1}{x}.$$

2013. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

266. (1)

$$\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} - \frac{10}{6} : \left(\frac{2}{10}\right)^2\right] \cdot \frac{6}{10} = \left[\frac{5}{6} - \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{1}\right] \cdot \frac{6}{10} = \frac{5 - 250}{6} \cdot \frac{6}{10} = -\frac{245}{10} = -\frac{49}{2}.$$

267. (2) Transformacije daju

$$\frac{a + 3b - a + 3b + 6b}{a^2 - 9b^2} \cdot \frac{a^2 - 9b^2}{b(2a + b)} = \frac{12}{2a + b}.$$

268. (3) Smena $10^x = t$ daje kvadratnu jednačinu $t^2 - 101t + 100 = 0$, $t^2 - 100t - t + 100 = (t - 100)(t - 1) = 0$. Tako su rešenja $t_1 = 100$ tj. $x_1 = 2$, i $t_2 = 1$ tj. $x_2 = 0$.