Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 1. јул 2024.

МАТЕМАТИКА (60)

1. Израчунати $(1-2x)^3$, а затим упростити израз

$$\frac{(x+x^3)\,(2-4x)}{1-6x+12x^2-8x^3} : \frac{x^2+2x^3}{(1-4x^2)(1-2x)} - 2\left(x+1+\frac{1}{x}\right).$$

2. Решити квадратну једначину и ирационалну неједначину:

   (а) $2x^2+5x-3=0$

   (б) $2(2x-1)+5\sqrt{2x-1}\le 3$

3. Упростити израз за $f(x)=\log_2 4x+\log_4(10x+3)^2-\log_2(4x^2+7x+1)$,
   а затим решити једначину $f(x)=0$.

4. Користећи основни тригонометријски идентитет доказати да је $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$,
   и на интервалу $[0,\frac{\pi}{2}]$ решити једначину $\cos^4 x-\sin^4 x=\frac{1}{2}$.

Решења:

1. На основу формуле за куб бинома имамо: $(1-2x)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2 \cdot 2x + 3\cdot (2x)^2 \cdot 1 - (2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$. Даље је, с обзиром на овај резултат, на основу једноставног рачуна:

$$\frac{(x+x^3)(2-4x)}{1-6x+12x^2-8x^3} : \frac{x^2+2x^3}{(1-4x^2)(1-2x)} - 2\left(x+1+\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \frac{x(1+x^2)2(1-2x)}{(1-2x)^3} \cdot \frac{(1-2x)(1+2x)(1-2x)}{x^2(1+2x)} - \frac{2(x^2+x+1)}{x}$$

$$= \frac{2(1+x^2)}{x} - \frac{2(x^2+x+1)}{x} = \frac{2+2x^2-2x^2-2x-2}{x} = -2.$$

2. (а) Ову квадратну једначину решавамо на основу познате формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4}$ одакле следи $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -3$.

   (б) Неједначина има смисла за $2x - 1 \geq 0 \leftrightarrow x \in [\dfrac{1}{2}, \infty)$. Приметимо да сменом $\sqrt{2x-1} = t$, ову неједначину сводимо на неједначину $2t^2 + 5t - 3 \leq 0$ чију смо одговарајућу једначину решавали у оквиру задатка (a). Цртањем графика квадратне функције или таблицом лако утврђујемо да се решење квадратне неједначине налази између два решења једначине: $-3 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$. Још треба решити неједначине $-3 \leq \sqrt{2x-1} \leq \dfrac{1}{2}$ при чему је лева страна неједнакости тривијално задовољена, док квадрирањем десне добијамо $2x - 1 \leq \dfrac{1}{4}$, одакле је $x \leq \dfrac{5}{8}$ што ће, уз услов неједначине, дати решење $x \in [\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}]$.

3. Користећи познате особине логаритма имамо

$$f(x) = \log_2 4x + 2\log_{2^2}(10x+3) - \log_2(4x^2+7x+1) = \log_2 4x + 2\cdot\frac{1}{2}\log_2(10x+3) - \log_2(4x^2+7x+1)$$

$$= \log_2 \frac{4x(10x+3)}{4x^2+7x+1} = \log_2 \frac{40x^2+12x}{4x^2+7x+1}.$$

Једначину $f(x) = 0$ решавамо лако:
$\log_2 \dfrac{40x^2+12x}{4x^2+7x+1} = 0 \leftrightarrow \dfrac{40x^2+12x}{4x^2+7x+1} = 2^0 = 1 \leftrightarrow 36x^2 + 5x - 1 = 0 \leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 13}{72}$
одакле је $x_1 = \dfrac{1}{9}, x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

4. Користимо разлику квадрата: $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$. Једначина $\cos 2x = \dfrac{1}{2}, x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ има једно решење кад је $2x = \frac{\pi}{3}$, одакле је $x = \frac{\pi}{6}$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 1. јул 2024.

МАТЕМАТИКА (30, РИ)

1. Одредити скуп решења једначине $2|x-1|+2|x+1|=12.$

2. Решити квадратну једначину и експоненцијалну неједначину

   (а) $3x^2+5x-2=0$

   (б) $2^x-2^{x-2}<3^{x-1}-3^{x-2}$

3. Доказати да за произвољне углове x и y важи следећа једнакост

$$(\cos 2x+\cos 2y)^2+(\sin 2x+\sin 2y)^2=4\cos^2(x-y)$$

Решења:

1. Једначина је еквивалентна једначини $|x-1|+|x+1|=6$. У зависности од знакова израза $x-1$ и $x+1$ имамо следеће случајеве:

$\mathbf{x<-1}$: Тада је $|x+1|=-x-1$, док је $|x-1|=1-x$, па је $|x-1|+|x+1|=1-x-x-1=-2x$. Из $-2x=6$ имамо $x=-3$ што задовољава услов.

$\mathbf{-1\le x<1}$: У овом случају је $|x+1|=x+1$, док је $|x-1|=1-x$, па се једначина своди на $2=6$ што је немогуће.

$\mathbf{x\ge 1}$: Тада је $|x+1|=x+1$, али је и $|x-1|=x-1$, па се једначина своди на $2x=6$, одакле добијамо $x=3$ које задовољава услов.

Дакле, решења једначине су 3 и -3.

2. (а) Једначину решавамо помоћу познате формуле : $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}$ одакле су решења $x_1=\dfrac{1}{3}, x_2=-2$.

   (б) Користећи познате особине експоненцијалне функције имамо:
$$2^x\left(1-\frac{1}{2^2}\right)<3^x\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}\right)\leftrightarrow\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{3-1}{9}\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{3}\leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^3\leftrightarrow x>3.$$

3. Квадрирајући одговарајуће биноме и срeђујући, имамо:
$(\cos 2x+\cos 2y)^2+(\sin 2x+\sin 2y)^2=\cos^2 2x+2\cos 2x\cos 2y+\cos^2 2y+\sin^2 2x+2\sin 2x\sin 2y+\sin^2 2y=2+2(\cos 2x\cos 2y+\sin 2x\sin 2y)=2+2\cos(2x-2y)=2\left(1+\cos 2(x-y)\right)=4\cos^2(x-y).$

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 1. јул 2024.

МАТЕМАТИКА (30, ИЗЖС)

1. Дато је $A = \dfrac{\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75}}{\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{75}}$ и $B = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5}\right) \cdot 2 - \dfrac{6}{4} : \dfrac{5}{8} + 0,1.$
Израчунати: A, B, $A + B$ и $A \cdot B$.

2. Решити једначину и неједначину

   (а) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

   (б) $3x^2 + 5x + 2 < 0$

3. Упростити израз $\left(\dfrac{a+1}{2a-2} + \dfrac{6}{2a^2-2} - \dfrac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \dfrac{a^2-1}{5a}$,
а затим израчунати његову вредност за $a = 0,6$.

Решења:

1. Приметимо да је $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Стога је $A = \dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}} = \dfrac{2}{5}$. Израз B се још лакше рачуна: $B = \dfrac{23}{20} \cdot 2 - \dfrac{6}{4} \cdot \dfrac{8}{5} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{23}{10} - \dfrac{24}{10} + \dfrac{1}{10} = 0$. Даље је $A + B = A, A \cdot B = 0 = B$.

2. (а) Једначину решавамо помоћу познате формуле : $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6}$ одакле су решења $x_1 = -\dfrac{2}{3}, x_2 = -1$.

   (б) Цртајући график квадратне функције или преко табеле, добијамо да је неједначина задовољена за $x \in (-1, -\dfrac{2}{3})$.

3. Дати израз (по)лако сређујемо:

$$\left(\frac{a+1}{2(a-1)} + \frac{6}{2(a-1)(a+1)} - \frac{a+3}{2(a+1)}\right) \cdot \frac{a^2-1}{5a} = \left(\frac{(a+1)^2 + 6 - (a+3)(a-1)}{2(a-1)(a+1)}\right) \cdot \frac{a^2-1}{5a}$$

$$= \frac{a^2 + 2a + 1 + 6 - a^2 - 3a + a + 3}{2(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a^2-1}{5a} = \frac{10}{2(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a^2-1}{5a} = \frac{1}{a}.$$

За $a = 0.6 = \dfrac{3}{5}$, дати израз је једнак $\dfrac{1}{a} = \dfrac{5}{3}$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 9. септембар 2024.

МАТЕМАТИКА (60)

1. Израз $2^3 - x^3$ написати у облику производа, а затим упростити израз
$$\frac{(x+x^3)(4-2x)}{8-x^3} : \frac{x^2+1}{x^2+2x+4} - 2\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

2. Решити једначине:

   (а) $2x^2 + x - 3 = 0$

   (б) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$

3. а) Ако је $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$ за оштар угао α, израчунати вредности осталих тригонометријских функција угла α.

   б) За дати угао α израчунати вредност израза $\cos 2\alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

4. $a)$ Ако је $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, израчунати $\log_2 a + \log_a 2$.

   $b)$ Решити једначину $\log_2 x + \log_x 2 = \dfrac{13}{6}$.

Решења:

1. На основу формуле за разлику кубова је: $8 - x^3 = 2^3 - x^3 = (2-x)(4+2x+x^2)$. Даље је, с обзиром на овај резултат, на основу једноставног рачуна:

$$\begin{aligned}&\frac{(x+x^3)(4-2x)}{8-x^3} : \frac{x^2+1}{x^2+2x+4} - 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{x(1+x^2)2(2-x)}{(2-x)(4+2x+x^2)} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x^2+1} - 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\\ &= 2x - 2x - \frac{2}{x} = -\frac{2}{x}.\end{aligned}$$

2. (а) Ову квадратну једначину решавамо на основу познате формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-3)}}{4} = \dfrac{-1\pm 5}{4}$ одакле следи $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = 1$.

   (б) Ово је биквадратна једначина, и сменом $x^2 = t$ се своди на претходни случај. Након враћања смене добијамо две једначине:
   $x^2 = -\frac{3}{2}$ - ова једначина нема решења у скупу реалних бројева

   $x^2 = 1$ - одакле су решења: ± 1.

3. *a*) Из чињенице да је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, имамо да је

$$2,4 = \frac{12}{5} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \to \cos\alpha = \frac{5}{12}\sin\alpha.$$

   Убацујући ову релацију у основни тригонометријски идентитет имамо:

$$\sin^2\alpha \cdot (1+\frac{25}{144}) = 1 \to \sin\alpha = \frac{1}{1+\frac{25}{144}} = \frac{144}{169}, \sin\alpha = \frac{12}{13},$$

   при чему смо узели позитиван предзнак, јер је по услову задатка угао α оштар. Даље је $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}, \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{5}{12}$.

   b) За дати угао α имамо $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{5^2-12^2}{169} = -\frac{119}{169}$, $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+\frac{5}{13}}{2} = \dfrac{9}{13}$, одакле имамо $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = -\frac{119}{169} + \frac{9}{13} = \frac{-119+117}{169} = -\frac{2}{169}$.

4. *a*) С обзиром да је $\log_2 a = \log_2\sqrt{2} - \log_2 2 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$, одавде имамо $\log_a 2 = \dfrac{1}{\log_2 a} = -2$, па је $\log_2 a + \log_2 a = -2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

   b) Услови: $x > 0, x \neq 1$. Стављајући $\log_2 x = t$ имамо $t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{13}{6}$ одакле добијамо квадратну једначину $t^2 - \dfrac{13}{6}t + 1 = 0 \leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0$. Одавде на познат начин добијамо решења $t_{1,2} = \dfrac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}$. Дакле $t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{2}{3}$. Враћањем смене имамо $x_1 = 2^{t_1} = 2^{3/2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, x_2 = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 9. септембар 2024.

МАТЕМАТИКА (30, РИ)

1. а) Израчунати куб бинома $(2x-1)^3$

   б) Упростити израз $\dfrac{5x+5y}{8x^3-12x^2+6x-1} \cdot \dfrac{(2x-1)^2}{x+y} \cdot \dfrac{2xy-y}{xy}$

2. *a*) Решити једначину $2^{x^2-3x} = 0,25$;

   b) Решити неједначину $2^{x^2-3x} \leq 0,25$.

3. Упростити израз $\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$,
   а затим израчунати његову вредност за $x = \frac{\pi}{6}$.

Решења:

1. Куб бинома је $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$. Даље је
$$\frac{5x+5y}{8x^3-12x^2+6x-1} \cdot \frac{(2x-1)^2}{x+y} \cdot \frac{2xy-y}{xy} = \frac{5(x+y)}{(2x-1)^3} \cdot \frac{(2x-1)^2}{x+y} \cdot \frac{(2x-1)y}{xy} = \frac{5}{x}$$

2. (а) Због $0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$, једначина је еквивалентна са $x^2-3x = -2$, односно $x^2-3x+2 = 0$, а њена решења су $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$, $x_1 = 2, x_2 = 1$

   (б) Експоненцијална функција са основом 2 је монотоно растућа, па је еквивалентна неједначина :
   $x^2 - 3x \leq -2$, односно $x^2 - 3x + 2 \leq 0$. Решење је интервал $[1, 2]$.

3. Након примене формула за разлику и збир кубова, оба разломка се могу скратити, па се добија
   $(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) - (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$.
   Вредност израза за $x = \frac{\pi}{6}$ је $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 9. септембар 2024.

МАТЕМАТИКА (30, ИЗЖС)

1. Дато је $A = \dfrac{\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75}}{\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{75}}$ и $B = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{5}\right) \cdot 2 - \dfrac{6}{4} : \dfrac{5}{8} + 3,1.$
   Израчунати: A, B, $A + B$ и $A \cdot B$.

2. Решити једначину и неједначину

   (а) $2x^2 + x - 3 = 0$

   (б) $2x^2 + x < 3$.

3. Упростити израз $\left(\dfrac{x+1}{2x-2} - \dfrac{3}{1-x^2} - \dfrac{x+3}{2x+2}\right) \cdot \dfrac{x^2-1}{5x}$,
   а затим израчунати његову вредност за $x = 1,4$.

Решења:

1. Приметимо да је $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Стога је $A = \dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}} = \dfrac{2}{5}$. Израз B се још лакше рачуна: $B = \dfrac{23}{20} \cdot 2 - \dfrac{6}{4} \cdot \dfrac{8}{5} + \dfrac{31}{10} = \dfrac{23}{10} - \dfrac{24}{10} + \dfrac{31}{10} = 3$. Даље је $A + B = \frac{17}{5}$, $A \cdot B = \frac{6}{5}$.

2. (а) Ову квадратну једначину решавамо на основу познате формуле:
   $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \dfrac{-1 \pm 5}{4}$ одакле следи $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = 1$.

   (б) Цртајући график квадратне функције или преко табеле, добијамо да је неједначина задовољена за $x \in (-\dfrac{3}{2}, 1)$.

3. Дати израз (по)лако сређујемо:

$$\left(\frac{x+1}{2x-2} - \frac{3}{1-x^2} - \frac{x+3}{2x+2}\right) \cdot \frac{x^2-1}{5x} = \left(\frac{(x+1)^2 + 6 - (x+3)(x-1)}{2(x-1)(x+1)}\right) \cdot \frac{x^2-1}{5x}$$

$$= \frac{10}{2(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x^2-1}{5x} = \frac{1}{x}.$$

   За $x = 1,4 = \dfrac{7}{5}$, дати израз је једнак $\dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{7}$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 23. септембар 2024.

МАТЕМАТИКА (60)

1. Израз $x^3 - 2^3$ написати у облику производа, а затим упростити израз
$$\frac{(x + x^3)(2x - 4)}{x^3 - 8} : \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 4} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

2. Решити једначине:

   (а) $2x^2 + x - 3 = 0$;

   (б) $2x^4 = 3 - x^2$.

3. а) Ако је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$ за оштар угао α, израчунати вредности осталих тригонометријских функција угла α.

   б) За дати угао α израчунати вредност израза $\cos 2\alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

4. a) Ако је $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, израчунати $\log_2 a + \log_a 2$.

   b) Решити једначину $6 \log_2 x + 6 \log_x 2 - 13 = 0$.

Решења:

1. На основу формуле за разлику кубова је: $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 - = (x-2)(4+2x+x^2)$. Даље је, с обзиром на овај резултат, на основу једноставног рачуна:

$$\begin{aligned} &\frac{(x+x^3)(2x-4)}{x^3-8} : \frac{x^2+1}{x^2+2x+4} - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x(1+x^2)2(x-2)}{(x-2)(4+2x+x^2)} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x^2+1} - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x - 2x - \frac{2}{x} = -\frac{2}{x}. \end{aligned}$$

2. (а) Ову квадратну једначину решавамо на основу познате формуле: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-3)}}{4} = \dfrac{-1\pm 5}{4}$ одакле следи $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = 1$.

   (б) Ово је биквадратна једначина, и сменом $x^2 = t$ се своди на претходни случај. Након враћања смене добијамо две једначине:
   $x^2 = -\frac{3}{2}$ - ова једначина нема решења у скупу реалних бројева

   $x^2 = 1$ - одакле су решења: ± 1.

3. *a*) Из чињенице да је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, имамо да је

$$\frac{12}{5} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \to \cos\alpha = \frac{5}{12}\sin\alpha.$$

   Убацујући ову релацију у основни тригонометријски идентитет имамо:

$$\sin^2\alpha \cdot \left(1+\frac{25}{144}\right) = 1 \to \sin\alpha = \frac{1}{1+\frac{25}{144}} = \frac{144}{169}, \sin\alpha = \frac{12}{13},$$

   при чему смо узели позитиван предзнак, јер је по услову задатка угао α оштар. Даље је $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}, \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{5}{12}$.

   b) За дати угао α имамо $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{5^2-12^2}{169} = -\frac{119}{169}$, $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+\frac{5}{13}}{2} = \dfrac{9}{13}$, одакле имамо $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = -\frac{119}{169} + \frac{9}{13} = \frac{-119+117}{169} = -\frac{2}{169}$.

4. *a*) С обзиром да је $\log_2 a = \log_2 1 - \log_2\sqrt{2} = 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, одавде имамо $\log_a 2 = \dfrac{1}{\log_2 a} = -2$, па је $\log_2 a + \log_2 a = -2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

   b) Услови: $x > 0, x \neq 1$. Стављајући $\log_2 x = t$ имамо $6t + \dfrac{6}{t} - 13 = 0$ одакле добијамо квадратну једначину $t^2 - \dfrac{13}{6}t + 1 = 0 \leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0$. Одавде на познат начин добијамо решења $t_{1,2} = \dfrac{13\pm\sqrt{169-144}}{12}$. Дакле $t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{2}{3}$. Враћањем смене имамо $x_1 = 2^{t_1} = 2^{3/2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, x_2 = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 23. септембар 2024.

МАТЕМАТИКА (30, РИ)

1. а) Израчунати куб бинома $(1-2x)^3$

   б) Упростити израз $\dfrac{4x+4y}{8x^3-12x^2+6x-1}\cdot\dfrac{(1-2x)^2}{x+y}\cdot\dfrac{2xy-y}{xy}$

2. a) Решити једначину $4\cdot 2^{x^2-3x}-1=0$;

   b) Решити неједначину $4\cdot 2^{x^2-3x}-1\leq 0$.

3. Упростити израз $\dfrac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}-\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$,
а затим израчунати његову вредност за $x=\frac{\pi}{3}$.

Решења:

1. Куб бинома је $(1-2x)^3 = 1-6x+12x^2-8x^3$. Даље је
$$\frac{4x+4y}{8x^3-12x^2+6x-1}\cdot\frac{(1-2x)^2}{x+y}\cdot\frac{2xy-y}{xy}=\frac{4(x+y)}{-(1-2x)^3}\cdot\frac{(1-2x)^2}{x+y}\cdot\frac{(-(1-2x))\cdot y}{xy}=\frac{4}{x}.$$

2. (а) Једначина је еквивалентна са $2^{x^2-3x+2}=1$, односно $x^2-3x+2=0$, а њена решења су $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}$, $x_1=2, x_2=1$

   (б) Експоненцијална функција са основом 2 је монотоно растућа, па је еквивалентна неједначина :
   $x^2-3x+2\leq 0$. Решење је интервал $[1,2]$.

3. Након примене формула за разлику и збир кубова, оба разломка се могу скратити, па се добија
$(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)-(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=2\sin x\cos x=\sin(2x)$.
Вредност израза за $x=\frac{\pi}{3}$ је $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.