Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 29. јун 2023.

МАТЕМАТИКА (60)

1. Израчунати вредност израза $\left(x+x^{-1}+y+y^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ за $x=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}$ и $y=\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}$.

2. У једначини $(k-1)x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ одредити вредност реалног параметра k тако да њена решења x_1 и x_2 задовољавају услов $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=2$.

3. Решити једначину $5^x+5^{3-x}=30$.

4. Решити једначину $2\log_3\sqrt{t-2}+\log_9(2t-3)^2=\log_2(\log_2 16)-2\log_3(\log_3 27)$.

5. Доказати да је $(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)^{-1}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2x$, а затим решити једначину $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Решења:

1. Приметимо да је $x=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}=\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}\cdot\dfrac{4+\sqrt{15}}{4+\sqrt{15}}=\dfrac{4+\sqrt{15}}{4^2-15}=4+\sqrt{15}=y^{-1}$. Аналогно добијамо да је $y=4-\sqrt{15}=x^{-1}$. Стога је $(x+x^{-1}+y+y^{-1})^{\frac{1}{2}}=\left(2(4+\sqrt{15}+4-\sqrt{15})\right)^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}=4$.

2. Примењујући Вијетове формуле на наведену квадратну једначину имамо
$$x_1+x_2=-\frac{k-5}{k-1}=\frac{5-k}{k-1},\ x_1x_2=-\frac{k+2}{k-1}=\frac{-k-2}{k-1}.$$
Даље је $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{\frac{5-k}{k-1}}{\frac{-k-2}{k-1}}=\dfrac{5-k}{-k-2}$, стога нам још остаје да решимо једначину $\dfrac{5-k}{-k-2}=2$ одакле следи $5-k=2(-k-2)=-2k-4\leftrightarrow -k+2k=-4-5$ и коначно $k=-9$.

3. Једначину трансформишемо користећи особине експоненцијалне функције: $5^x+\dfrac{5^3}{5^x}=30$ па ћемо, након смене $5^x=t$, имати једноставнију једначину $t+\dfrac{125}{t}=30$ односно, након множења са t и сређивања, $t^2-30t+125=0$. Ова једначина има два решења, $t_1=5$ и $t_2=25$ одакле добијамо два решења полазне једначине $5^x=5\rightarrow x_1=1$, $5^x=25\rightarrow x_2=2$.

4. Рачунамо прво $\log_2 16 = 4, \log_2(\log_2 16) = \log_2 4 = 2, \log_3 27 = 3, \log_3(\log_3 27) = 1$, па је десна страна једначине $\log_2(\log_2 16) - 2\log_3(\log_3 27) = 0$. Једначина има смисла за $t-2>0, 2t-3>0 \leftrightarrow t>2$.

   У наставку трансформишемо леву страну једначине:

$$2\log_3\sqrt{t-2} = 2\log_3(t-2)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1}{2}\log_3(t-2) = \log_3(t-2),$$

$$\log_9(2t-3)^2 = \log_{3^2}(2t-3)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\log_3(2t-3) = \log_3(2t-3).$$

   Па имамо

$$\log_3(t-2) + \log_3(2t-3) = 0 \leftrightarrow \log_3\big((t-2)(2t-3)\big) = 0,$$

   одавде добијамо квадратну једначину $(t-2)(2t-3) = 2t^2-7t+6 = 3^0$, односно $2t^2-7t+5 = 0$ која има решења $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = 1$ од којих само прво прихватамо, с обзиром на услове једначине.

5. Рачунамо:

$$(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)^{-1} = \Big(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}\Big)^{-1} = \Big(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x}\Big)^{-1} = \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x.$$

   Једначина се своди на $(\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и, најзад $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$ чија су решења $2x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, односно $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 29. јун 2023.

МАТЕМАТИКА (30, РИ)

1. Упростити израз $\left(\left(2-\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right):\left(2+\dfrac{a^2+b^2}{ab}\right)\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2.$

2. У једначини $(k-1)x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ одредити вредност реалног параметра k тако да њена решења x_1 и x_2 задовољавају услов $x_1^2+x_2^2=3$.

3. Решити једначину $\log_9(2t-3)^2+2\log_3\sqrt{t-2}=3\log_5 25+2\log_3 27-4\log_2 8.$

Решења:

1. Имамо да је

$$\left(2-\frac{a^2+b^2}{ab}\right):\left(2+\frac{a^2+b^2}{ab}\right)=\frac{2ab-a^2-b^2}{ab}:\frac{2ab+a^2+b^2}{ab}=\frac{-(a-b)^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(a+b)^2}$$
$$=-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Одавде је

$$\left(\left(2-\frac{a^2+b^2}{ab}\right):\left(2+\frac{a^2+b^2}{ab}\right)\right)^{-1}=\left(-\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right)^{-1}=-\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2},$$

па је

$$\left(\left(2-\frac{a^2+b^2}{ab}\right):\left(2+\frac{a^2+b^2}{ab}\right)\right)^{-1}\cdot\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2=-\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2=-1.$$

2. Примењујући Вијетове формуле на наведену квадратну једначину имамо

$$x_1+x_2=-\frac{k-5}{k-1}=\frac{5-k}{k-1},\ x_1x_2=-\frac{k+2}{k-1}=\frac{-k-2}{k-1}.$$

Даље је $3=x_1^2+x_2^2\pm 2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\dfrac{5-k}{k-1}\right)^2-2\dfrac{-k-2}{k-1}$. Сређивањем се добија $3=\dfrac{(5-k)^2+2(k+2)(k-1)}{(k-1)^2}=\dfrac{3k^2-8k+21}{(k-1)^2}$, односно $3(k^2-2k+1)=3k^2-8k+21$. Остаје да решимо линеарну једначину $2k=18$,па је решење $k=9$.

3. Прво рачунамо $3\log_5 25+2\log_3 27-4\log_2 8=3\cdot 2+2\cdot 3-4\cdot 3=0$. Једначина има смисла за $2t-3>0$ и $t-2>0$, дакле за $t>2$. Имамо да је

$$\log_9(2t-3)^2=2\log_{3^2}(2t-3)=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3(2t-3)=\log_3(2t-3),$$

$$2\log_3\sqrt{t-2}=2\cdot\frac{1}{2}\log_3(t-2)=\log_3(t-2).$$

Одавде имамо

$$\log_3(t-2)+\log_3(2t-3)=0\leftrightarrow\log_3\big((t-2)(2t-3)\big)=0,$$

одавде добијамо квадратну једначину $(t-2)(2t-3)=2t^2-7t+6=3^0$, односно $2t^2-7t+5=0$ која има решења $t_1=\frac{5}{2}$ и $t_2=1$ од којих само прво прихватамо, с обзиром на услове једначине.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 29. јун 2023.

МАТЕМАТИКА (30, ИЗЖС)

1. Израчунати вредност израза $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{3\cdot 32^{\frac{1}{2}}}{2^{-1}}-\left(\dfrac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}-27^{\frac{1}{3}}\cdot 18^{\frac{1}{2}}\right)$

2. Решити дату квадратну једначину $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{3(x-1)}{4}=\dfrac{(x-3)^2}{6}+\dfrac{27}{12}$.

3. Решити једначину $3\log_5 25+2\log_3 27-4\log_2 x=0$.

Решења:

1.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3\cdot 32^{\frac{1}{2}}}{2^{-1}}-\left(\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}-27^{\frac{1}{3}}\cdot 18^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3\cdot\sqrt{32}}{\frac{1}{2}}-(50)^{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt{18}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(3\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2-\sqrt{25\cdot 2}-3\cdot\sqrt{9\cdot 2}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(24\sqrt{2}-5\sqrt{2}-3\cdot 3\sqrt{2}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(24\sqrt{2}-5\sqrt{2}-9\sqrt{2}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 10\sqrt{2}\\
&= 5
\end{aligned}$$

2. Множењем једначине са 12, добија се $4x+4+9x-9=2(x^2-6x+9)+27$, а сабирањем сличних чланова $2x^2-25x+50=0$. Применом квадратне формуле $x_{1,2}=\dfrac{25\pm\sqrt{625-4\cdot 2\cdot 50}}{4}$ добијају се решења $x_1=10$ и $x_2=\dfrac{5}{2}$.

3. Израчунавањем логаритама прва два сабирка се могу другачије записати, па се добија $3\cdot 2+2\cdot 3-4\log_2 x=0$, односно $12=4\log_2 x$, одакле је $\log_2 x=3$, па је решење $x=2^3=8$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 7. септембар 2023.

МАТЕМАТИКА (60)

1. а) Израчунати куб бинома $(x-3)^3$.

   б) Упростити израз $\dfrac{2x+2y}{x^3-9x^2+27x-27}\cdot\dfrac{(x-3)^2}{x+y}\cdot\dfrac{xy-3y}{2xy}$.

2. Решити дате једначине:

   а) $4x^2-17x+18=0$

   б) $4x^4-17x^2+18=0$.

3. а) Ако је $\sin\alpha=0,6$ за оштар угао α, израчунати вредности осталих тригонометријских функција.

   б) Ако је $\sin\alpha=0,6$ за оштар угао α, израчунати вредност израза $I=\sin 2\alpha+4\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

4. Израчунати $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$, а затим решити једначину

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

5. Одредити све реалне бројеве за које важи $|x+2|=3(2-x)$.

Решења:

1. $a)$ На основу формуле за куб бинома имамо једноставно:
$(x-3)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27.$

   $b)$ Користећи претходни резултат добијамо
$$\frac{2x+2y}{x^3-9x^2+27x-27} \cdot \frac{(x-3)^2}{x+y} \cdot \frac{xy-3y}{2xy} = \frac{2(x+y)}{(x-3)^3} \cdot \frac{(x-3)^2}{x+y} \cdot \frac{y(x-3)}{2xy} = \frac{1}{x}.$$

2. $a)$ Једначину решавамо по познатој формули: $x_{1,2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 18}}{8} = \dfrac{17 \pm 1}{8}$ одакле је $x_1 = \frac{9}{4}$, $x_2 = 2$.

   $b)$ Једначину сменом $x^2 = t$ сводимо на претходну једначину: $4t^2 - 17t + 18 = 0$ која има решења $t_1 = \frac{9}{4}$ и $t_2 = 2$ одакле имамо $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$, а затим и $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$.

3. $a)$ На основу Основног тригонометријског идентитета $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, имамо да је $\cos^2\alpha = 0,64$ одакле, с обзиром да је угао α оштар, добијамо $\cos\alpha = 0,8$. Даље је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4} = 0,75$, а затим и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{4}{3}$.

   $b)$ Имамо $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-0,8}{2} = 0,1 = \frac{1}{10}$, одакле имамо $4 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$. Најзад је $I = \sin 2\alpha + 4 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{24}{25} + \frac{2}{5} = \frac{34}{25}$.

4. Имамо $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})} = 1$. Смена $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = t$ даје $t + \frac{1}{t} = 4$ која после множења са t и сређивања постаје $t^2 - 4t + 1 = 0$ која има решења $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$ одакле је $t_1 = 2+\sqrt{3}$, $t_2 = 2-\sqrt{3}$. Једначина $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$ има решење $x_1 = 2$ а једначина $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$ има решење $x_2 = -2$.

5. Разликујемо два случаја. Ако је $x + 2 \geq 0$ тј. $x \in [-2, \infty)$ једначина постаје $x + 2 = 3(2-x)$ која се своди на $4x = 4$ односно $x = 1$ које припада наведеној области, па представља решење полазне једначине.

   С друге стране, ако је $x + 2 < 0$ тј. ако је $x \in (-\infty, -2)$, једначина се своди на $-x - 2 = 3(2-x)$ која се даље сређује као $2x = 8$ односно $x = 4$, али ово решење не припада наведеној области па га одбацујемо. Дакле, једначина има само једно решење: $x = 1$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 7. септембар 2023.

МАТЕМАТИКА (30, РИ)

1. а) Израчунати куб бинома $(2x+1)^3$

   б) Упростити израз $$\frac{3x+3y}{8x^3+12x^2+6x+1}\cdot\frac{(2x+1)^2}{x+y}\cdot\frac{2xy+y}{3xy}$$

2. Решити једначину $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=3$.

3. Упростити израз $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$,
   а затим израчунати његову вредност за $\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$.

Решења:

1. *a*) По формули за куб бинома имамо једноставно: $(2x+1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2+1^3=8x^3+12x^2+6x+1$.

   b) На основу претходно добијеног израза имамо:
   $$\frac{3x+3y}{8x^3+12x^2+6x+1}\cdot\frac{(2x+1)^2}{x+y}\cdot\frac{2xy+y}{3xy}=\frac{3(x+y)}{(2x+1)^3}\cdot\frac{(2x+1)^2}{x+y}\cdot\frac{y(2x+1)}{3xy}=\frac{1}{x}.$$

2. Једначина има смисла за $x\geq 0,\ 9-x\geq 0$ односно за $x\in[0,9]$. Тада можемо квадрирати целу једначину и добијамо
   $$(\sqrt{x}+\sqrt{9-x})^2=3^2\Leftrightarrow$$
   $$x+2\sqrt{x(9-x)}+9-x=9$$
   Одавде је $\sqrt{x(9-x)}=0$ а ова једначина има решења $x_1=0, x_2=9$. Непосредном провером утврђује се да ова решења задовољавају полазну једначину.

3. Сређујемо дати израз:
   $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}.$$
   Даље је, се, на основу Основног тригонометријског идентитета, наведени израз своди на
   $$\frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$
   За $\alpha=\frac{4\pi}{3}$ имамо да је $\sin\alpha=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је наведени израз једнак $\frac{2}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{4}{\sqrt{3}}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Пријемни испит, 7. септембар 2023.

МАТЕМАТИКА (30, ИЗЖС)

1. Израчунати вредност израза $\sqrt{\sqrt{\left(1+2^2\right)^2-2^4}+\sqrt{2\cdot 3^2-\sqrt{4}}+9}$

2. Применити формуле за квадрат бинома и за куб бинома, а затим упростити израз
$$(2x-1)^2+(x-2)^3-(2x-1)(x-2).$$

3. Решити једначину $2^{x+2}-2^{x+1}-2^x-2^2=0.$

Решења:

1. Након једноставног рачуна добијамо
$\sqrt{\sqrt{\left(1+2^2\right)^2-2^4}+\sqrt{2\cdot 3^2-\sqrt{4}}+9}=\sqrt{\sqrt{25-16}+\sqrt{18-2}+9}=$
$=\sqrt{\sqrt{9}+\sqrt{16}+9}=\sqrt{3+4+9}=\sqrt{16}=4.$

2. Примењујући наведене формуле имамо
$(2x-1)^2+(x-2)^3-(2x-1)(x-2)=(2x)^2-2\cdot 2x+1^2+x^3-3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2-2^3-(2x^2-x-4x+2)$
$=4x^2-4x+1+x^3-6x^2+12x-8-2x^2+x+4x-2=x^3-4x^2+13x-9.$

3. Једначина се своди на $2^x\cdot 2^2-2^x\cdot 2^1-2^x=2^2$, одакле је $2^x(2^2-2-1)=2^2$ тј. $2^x=2^2$ која има јединствено решење $x=2$.

Универзитет у Новом Саду

Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 21. септембар 2023.

МАТЕМАТИКА (60)

1. а) Израчунати куб бинома $(-1+2x)^3$.

   б) Упростити израз $\dfrac{2x^2-x}{8x^3-12x^2+6x-1}\cdot\dfrac{x+y}{xy}\cdot\dfrac{(2x-1)^2}{x^2+xy}$.

2. Решити дате једначине:

   а) $2x^2-3x+1=0$

   б) $2\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-3\cdot\dfrac{1}{x}+1=0.$

3. а) Ако је $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ за оштар угао α, израчунати $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

   б) Ако је $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ за оштар угао α, израчунати вредност израза $I=\sin 2\alpha+2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

4. Решити једначину $(\sqrt{2})^{2x}+\dfrac{1}{2^x}=4,25.$

5. Одредити све реалне бројеве за које важи $3x+|x-2|=8.$

Решења:

1. $a)$ На основу формуле за куб бинома имамо једноставно:
$(-1+2x)^3 = (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2\cdot 2x + 3\cdot(-1)(2x)^2 + (2x)^3 = -1 + 6x - 12x^2 + 8x^3$.

   $b)$ Користећи претходни резултат добијамо
$$\frac{2x^2-x}{8x^3-12x^2+6x-1}\cdot\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{(2x-1)^2}{x^2+xy} = \frac{x(2x-1)}{(2x-1)^3}\cdot\frac{x+y}{xy}\cdot\frac{(2x-1)^2}{x(x+y)} = \frac{1}{xy}.$$

2. $a)$ Једначину решавамо по познатој формули: $x_{1,2} = \dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{4} = \dfrac{3\pm 1}{4}$ одакле је $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

   $b)$ Једначину сменом $\frac{1}{x} = t$ сводимо на претходну једначину: $2t^2 - 3t + 1 = 0$ која има решења $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = 1$ одакле имамо $x_1 = \frac{1}{t_1} = 2$, а затим и $x_2 = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{2}$.

3. $a)$ На основу Основног тригонометријског идентитета $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, имамо да је $\cos^2\alpha = \frac{144}{169}$ одакле, с обзиром да је угао α оштар, добијамо $\cos\alpha = \frac{12}{13}$. Даље је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$ а затим и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{12}{5}$.

   $b)$ Имамо $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{12}{13} = \frac{120}{169}$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1-\frac{12}{13}}{2} = \frac{1}{26}$, одакле имамо $2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cdot\frac{1}{26} = \frac{1}{13}$. Најзад је $I = \sin 2\alpha + 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{120}{169} + \frac{1}{13} = \frac{133}{169}$.

4. Еквивалентни запис једначине је $2^x + \dfrac{1}{2^x} = \dfrac{17}{4}$. Увођењем смене $2^x = t$ и множењем једначине са $4t$ добија се $4t^2 - 17t + 4 = 0$. Применом формуле за решавање квадратне једначине се добија $t_1 = \frac{32}{8} = 4$ и $t_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Решавањем једначина $2^x = 4$ и $2^x = \frac{1}{4}$, добијају се решења $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

5. Разликујемо два случаја.
Прво, $x \geq 2$. Једначина постаје $3x + x - 2 = 8$, одакле $4x = 10$ и $x = \frac{5}{2}$.
Друго, $x < 2$. Онда се решава једначина $3x + 2 - x = 8$, одакле $2x = 6$ и $x = 3$, али ово решење одбацујемо.
Стога је само једно решење $x = \frac{5}{2}$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 21. септембар 2023.

МАТЕМАТИКА (30, РИ)

1. а) Израчунати куб бинома $(-x-2)^3$.

   б) Упростити израз $\dfrac{y}{-8-12x-6x^2-x^3}\cdot\dfrac{-x^2-2x}{y^2}\cdot\dfrac{(-x-2)^2}{2x}$.

2. Решити једначину $\sqrt{x}+\sqrt{25-x}=7$.

3. Упростити израз $\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$,
   а затим израчунати његову вредност за $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$.

Решења:

1. *a*) По формули за куб бинома имамо једноставно:
$$(-x-2)^3=-(x+2)^3=-(x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3)=-8-12x-6x^2-x^3.$$
   b) На основу претходно добијеног израза имамо:
$$\frac{y}{-8-12x-6x^2-x^3}\cdot\frac{-x^2-2x}{y^2}\cdot\frac{(-x-2)^2}{2x}=\frac{y}{-(x+2)^3}\cdot\frac{-x(x+2)}{y^2}\cdot\frac{(x+2)^2}{2x}=\frac{1}{2y}.$$

2. Једначина има смисла за $0\le x\le 25$, односно за $x\in[0,25]$. Тада можемо квадрирати целу једначину и добијамо
$$(\sqrt{x}+\sqrt{25-x})^2=7^2\Leftrightarrow$$
$$x+2\sqrt{x(25-x)}+25-x=49$$
   Одавде је $2\sqrt{x(25-x)}=24$, а њој еквивалентна квадратна једначина $25x-x^2=144$ има решења $x_1=16, x_2=9$. Непосредном провером утврђује се да ова решења задовољавају полазну једначину.

3. Сређујемо дати израз:
$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{(1-\cos\alpha)^2+(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}=\frac{2(1+\cos^2\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$$
   За $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ имамо да је $\cos\alpha=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је наведени израз једнак $\frac{2(1+\frac{3}{4})}{1-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{14}{4}}{\frac{1}{4}}=14$.

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 21. септембар 2023.

МАТЕМАТИКА (30, ИЗЖС)

1. Израчунати вредност израза $\sqrt{\sqrt{\left(1+2^2\right)^2-2^4}+\sqrt{2\cdot 3^2-\sqrt{4}}+9}$

2. Применити формуле за квадрат бинома и за куб бинома, а затим упростити израз

$$(2x-1)^2+(x-2)^3-(2x-1)(x-2).$$

3. Решити једначину $2^{x+2}-2^{x+1}-2^x-2^2=0.$